Lycée Honoré de Balzac Novembre 2024
PCSI

Programme des colles de la semaine du 18 novembre 2024

Calculs de primitives. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Calculs de primitives

On considère des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Primitive d'une fonction. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors[1] l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{K}$.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction admettant une primitive, si $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(a) = \alpha$.
3. Liste de primitives usuelles.
4. Propriétés pour l'instant admises de l'intégrale
   (a) Définition intuitive comme l'aire (algébrique) sous la courbe de la fonction intégrée
   (b) Linéarité de l'intégrale
   (c) Relation de Chasles
   (d) Positivité de l'intégrale. Cas d'une fonction continue et positive d'intégrale nulle.
   (e) Croissance de l'intégrale
   (f) Inégalité triangulaire pour les intégrales (démontré dans le cas d'une fonction à valeurs réelles).
5. Théorème fondamental de l'intégration. Conséquence : une fonction continue sur I admet des primitives sur I.
6. Intégration par parties[1]
7. Changement de variable[1]
8. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$.
9. Méthode pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Équation du type $\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I, où a et b sont des fonctions continues sur I. Le cas où y' est multipliée par une fonction qui peut s'annuler donne lieu à l'étude de raccords ; quelques exemples simples ont été traités.
2. Cas d'une équation homogène
   (a) Stabilité de l'ensemble des solutions par combinaison linéaire[1]
   (b) Résolution de l'équation homogène.
3. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre : la résolution passe par la recherche d'une solution particulière.
4. Principe de superposition[1]
5. Méthode de variation de la constante
6. Dans le cas d'une équation à coefficient a constant et de seconds membres spécifiques, on sait sous quelle forme chercher une solution particulière
   (a) second membre constant
   (b) second membre produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle (du type $x \longmapsto e^{sx}$ où $s \in \mathbb{C}$)
   (c) second membre combinaison linéaire de $x \longmapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $x \longmapsto \cos(\omega x + \varphi)$, où $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$, quand $a \in \mathbb{R}$.

1. Résultat démontré en cours.