Lycée Honoré de Balzac — Mars 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 10 mars 2025

Dérivation. Polynômes

Dérivation

1. Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée ; dérivée à gauche, à droite ; interprétation géométrique.
2. Développement limité à l'ordre 1 (on n'a pas encore introduit la notation « o ») ; équivalence[1] entre l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 et la dérivabilité.
3. Dérivation et opérations sur les fonctions. Dérivée d'une composée[1]. Dérivée d'une bijection réciproque, quand f' ne s'annule pas.
4. Extrema : notions de borne supérieure, borne inférieure, maximum/minimum global/local ; point critique.
5. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et admet un extremum local en un point x_0 à l'intérieur de l'intervalle I (i.e. x_0 n'est pas une borne de I), alors[1] $f'(x_0) = 0$.
6. Théorème de Rolle[1].
7. Théorème des accroissements finis[1].
8. Inégalité des accroissements finis[1] : version « $m \leqslant f' \leqslant M$ » et version « $|f'| \leqslant K$ ».
9. Fonction lipschitzienne.
10. Lien entre le signe de f' et la monotonie de f sur un intervalle[1].
11. Théorème de la limite de la dérivée[1] ; conséquence pour le prolongement d'une fonction de classe C^1.
12. Conséquences de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude des suites récurrentes de la forme « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ ». Contrôle de la distance entre les termes de la suite et les points fixes de f. Complément : contrôle de la distance entre deux termes de la suite.
13. Dérivées successives : fontion de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
14. Une combinaison linéaire de fonctions de classe C^k est[1] de classe C^k. Dérivée $k^{\text{ème}}$ d'une combinaison linéaire (quand $k < \infty$).
15. Un produit de fonctions de classe C^k est de classe C^k. Formule de Leibniz[1].
16. Un quotient de fonctions de classe C^k est de classe C^k (là où il est défini).
17. Une composée de fonctions de classe C^k est de classe C^k.
18. Fonctions convexes
    (a) Définition.
    (b) Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses sécantes.
    (c) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors[1] pour tout $a \in I$, la fonction taux d'accroissement Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
    (d) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est convexe ssi[1] f' est croissante sur I.
    (e) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi $f'' \geqslant 0$.
    (f) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on a l'équivalence : f est convexe ssi[1] le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.
    (g) Fonction concave. Les résultats sur les fonctions convexes restent valables en changeant le sens des inégalités.
    (h) Point d'inflexion.
19. Prolongement de la notion de dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
    (a) Rappel des résultats déjà énoncés dans le chapitre sur les nombres complexes.
    (b) Inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction de classe C^1.

Polynômes (les $3/4$ du chapitre)

1. Notion de polynôme à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Unicité des coefficients. Somme et produit de polynômes. Formule du binôme de Newton.
2. Degré d'un polynôme. Lien avec la somme et le produit de polynômes.

1. Résultat démontré en cours.

3. Composition de polynômes.
4. Arithmétique : divisibilité, division euclidienne [1], algorithme associé.
5. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
6. Racine d'un polynôme
   (a) Définition
   (b) Le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est [1] $P(a)$.
   (c) Il en résulte que a est racine de P ssi [1] $X - a$ divise P.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$: si P est de degré n, alors [1] P admet au plus n racines. Conséquences : si $\deg(P) \leqslant n$ et si P admet $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$; un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul. On en déduit que l'on peut identifier polynôme et fonction polynomiale associée.
   (e) Si les scalaires $x_1, \dots, x_k$ dont deux à deux distincts et sont racines de P, alors [1] $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{k}(X - x_\ell)$ divise P.
   (f) Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine a dans P comme $\max\big\{k \in \mathbb{N} \mid (X-a)^k \text{ divise } P\big\}$. On accepte la multiplicité 0 pour dire que a n'est pas racine de P.
   (g) Notion de polynôme scindé. Détermination directe de la multiplicités des racines quand le polynôme scindé est donné sous forme factorisée.
   (h) Relations coefficients-racines pour les polynômes scindés : cas de la somme et du produit des racines (comptées avec multiplicité).
   (i) Polynômes scindés à racines simples [1]. Exemple : factorisation de $X^n - 1$.
7. Dérivée formelle d'un polynôme. Dérivées successives.
8. Opérations sur les dérivées. Formule de Leibniz.
9. Formule de Taylor pour les polynômes [1].
10. Caractérisation de la multiplicité des racines par l'annulation des dérivées successives [1].