Lycée Honoré de Balzac
PCSI

Mai 2025

Programme des colles de la semaine du 12 mai 2025

Espaces vectoriels de dimension finie. Dénombrement

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Un espace est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
2. Théorème de la base incomplète et conséquences : de toute famille génératrice on peut extraire une base ; tout espace de dimension finie admet au moins une base ; si E est de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base.
3. Si E est de dimension finie et admet une famille génératrice à p éléments, alors toute famille libre de E admet au plus p éléments.
4. Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments [1]. On appelle dimension de E ce nombre d'éléments.
5. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
6. Retour sur les ensembles de solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 homogènes ; des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes. Ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, homogène.
7. Soit E de dimension n.
   (a) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E.
   (b) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice de E, alors $p \geqslant n$ et on a : $p = n \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E.
8. Familles de $n+1$ polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$. Retour sur la formule de Taylor pour les polynômes.
9. Si E est de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, on a : $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E$.
10. Définition : hyperplan d'un espace de dimension finie.
11. Définition : rang d'une famille de vecteurs. On remarque que le calcul du rang revient à extraire une base d'une famille génératrice.
12. Somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie
    (a) Si $\mathcal{F}_1$ est une famille libre de E_1, $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de E_2 et si E_1 et E_2 sont en somme directe, alors [1] la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est une famille libre de vecteurs de $E_1 \oplus E_2$.
    (b) Base adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_2$.
    (c) Dimension d'une somme directe.
    (d) Formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, dans le cas général [1].
    (e) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire [1].
    (f) Caractérisations des couples d'espaces supplémentaires à l'aide de la dimension [1].

Dénombrement

1. Notion d'ensemble fini. Cardinal.
2. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Cas d'égalité.
3. Applications entre deux ensembles finis E et F
   (a) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ injective, alors [1] $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$ et $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (b) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ surjective, alors [1] $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.
   (c) S'il existe $f : E \longrightarrow F$ bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
   (d) Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors [1] on a les équivalences : f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ f bijective.
4. Cardinal d'une réunion disjointe.
5. Si A et B sont deux parties de E, $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ et [1] $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
6. Formule du crible de Poincaré pour une réunion de deux parties finies [1].
7. Cardinal d'un produit cartésien [1].

1. Résultat démontré en cours.

8. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.
9. Nombre de parties d'un ensemble fini.
10. Notion de p-liste d'éléments de E. Nombre de p-listes.
11. Nombre de p-listes d'éléments distincts de E. Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre.
12. Permutations d'un ensemble fini. On applique en premier lieu ce vocabulaire aux bijections de l'ensemble dans lui-même, puis, dans un deuxième temps, aux n-listes d'éléments distincts, où n est le cardinal de l'ensemble.
13. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
14. Notation $\mathcal{P}_p(E)$ pour l'ensemble des parties de E ayant p éléments.
    Définition : $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$ où $n = \mathrm{Card}(E)$.
15. On explique de façon combinatoire, à partir de cette définition, tous les résultats sur les coefficients binomiaux vus dans le chapitre de calculs algébriques : valeurs élémentaires, symétrie des coefficients binomiaux, relation $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, formule avec factorielles.