Lycée Honoré de Balzac — Mai 2025
PCSI

Programme des colles de la semaine du 26 mai 2025

Applications linéaires

1. Définition. Caractérisations.
2. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire [1].
3. Une composée d'applications linéaires est linéaire [1].
4. Linéarité de la composition à droite (resp. à gauche). Composée d'isomorphismes.
5. Linéarité de la bijection réciproque d'un isomorphisme [1].
6. Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
7. Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sous-espaces vectoriels de leurs espaces respectifs [1].
8. Lien entre noyau et injectivité [1]. Lien entre image et surjectivité.
9. Équations linéaires du type « $f(x) = b$ ». Usage d'une solution particulière x_p (si elle existe, i.e. quand $b \in \mathrm{Im}(f)$) pour décrire l'ensemble des solutions comme $x_p + \mathrm{Ker}(f)$.
10. Cas des endomorphismes
    (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme. En particulier, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, notation f^k ; notion de polynôme de l'endomorphisme f.
    (b) Automorphismes de E. Notation $GL(E)$ et énoncé des propriétés relatives au groupe linéaire ($\mathrm{Id}_E \in GL(E)$, passage à l'inverse, stabilité par composition).
    (c) Homothéties.
    (d) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, projection p sur E_1 parallèlement à E_2.
    - Définition. Propriétés [1] : $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$.
    - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$, alors [1] $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ et f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

    (e) Si $E_1 \oplus E_2 = E$, symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
    - Définition. Propriétés [1] : $p = \dfrac{\mathrm{Id}_E + s}{2}$, $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \mathrm{Id}_E$, $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
    - Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = \mathrm{Id}_E$, alors [1] en posant $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a $E_1 \oplus E_2 = E$ et f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
11. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $b_1, \ldots, b_n \in E$.
    (a) On suppose que $(b_1 \ldots, b_n)$ est une famille génératrice de E. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \ldots, f(b_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
    (b) On suppose que f est injective et que la famille $(b_1, \ldots, b_n)$ est libre. Alors [1] la famille $\big(f(b_1), \ldots, f(b_n)\big)$ est libre.
    (c) On suppose que $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E. On a alors l'équivalence [1] :
    $$f \text{ est injective} \iff \text{la famille } \big(f(b_1), \ldots, f(b_n)\big) \text{ est libre.}$$
    (d) Conséquence : si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, on a l'équivalence :
    $$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la famille } \big(f(b_1), \ldots, f(b_n)\big) \text{ est une base de } F.$$
12. (a) Un espace E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}$ ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et le choix d'un tel isomorphisme correspond au choix d'une base de E.
    (b) Deux espaces E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.
13. Applications linéaires de rang fini
    (a) Définition de $\mathrm{rg}(f)$.
    (b) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.
    (c) Pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, on a [1] : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

1. Résultat démontré en cours.

(d) Avec les mêmes notations :

   — si f est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$;

   — si g est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(b_k) = \beta_k$.
15. On admet pour l'instant : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
16. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors, pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a [1] :
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$
17. Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, notion d'inverse à droite et d'inverse à gauche. Si f est inversible à droite ou à gauche, alors [1] f est inversible et son inverse à droite ou à gauche est sa bijection réciproque.
18. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et que $E = E_1 \oplus E_2$. Pour toutes $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
19. Forme géométrique du théorème du rang [1] : $f \in \mathscr{L}(E, F)$ induit un isomorphisme entre tout supplémentaire S de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
20. Théorème du rang [1] : si E est de dimension finie, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$.
21. Formes linéaires et hyperplans. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
   (a) Définitions : formes linéaires, hyperplans.
   (b) Soit f une forme linéaire non nulle sur E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$). Alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.
   (c) Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \operatorname{Ker}(f)$.
   (d) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. On a l'équivalence
$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g) \iff \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ f = \lambda g\Big).$$
   (e) Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle non contenue dans H, alors [1] $E = H \oplus D$.
   (f) Allure générale d'une forme linéaire (écriture en fonction des coordonnées des vecteurs, dans une base fixée). Équation d'un hyperplan (en ayant fixé une base de E).