Lycée Honoré de Balzac — Septembre 2023
PCSI

Programme des colles de la semaine du 25 septembre 2023

Quelques types de raisonnement. Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Quelques types de raisonnement

1. Exemples de démonstrations « à la main » d'assertions en « pour tout » ou « il existe ».
2. Implication, condition nécessaire, condition suffisante. Réciproque. Équivalence. Exemples simples de raisonnements par équivalences.
3. Raisonnement par disjonction de cas.
4. Raisonnement par l'absurde.
5. Raisonnement par analyse-synthèse.
6. Raisonnement par récurrence
   (a) Formules donnant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ (où $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).
   (b) Notion de récurrence double, forte, et remarque qu'un choix avisé d'hypothèse de récurrence permet de se ramener à une récurrence simple.

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction.
2. Opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit ; composition.
3. Graphe d'une fonction.
4. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, lien entre le graphe de f et celui de $x \longmapsto f(x+a)$ et celui de $x \longmapsto f(x)+a$, où $a \in \mathbb{R}$. Même chose avec $x \longmapsto f(ax)$ et $x \longmapsto af(x)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou encore $a = -1$.
5. Fonctions paires, fonctions impaires. Exercice : toute fonction se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
6. Fonction périodique. Exercice : si f est T-périodique (où $T \in \mathbb{R}_+^*$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est (kT)-périodique.
7. Monotonie et stricte monotonie. Composition de fonctions monotones.
8. Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées.
9. Fonction valeur absolue. Les résultats ci-dessous ont été vus en exercice.
   (a) $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R}_+,\ |y| \leqslant M \Longleftrightarrow -M \leqslant y \leqslant M$.
   (b) Pour tous $y, m, M \in \mathbb{R}$, si $m \leqslant y \leqslant M$ alors $|y| \leqslant \max(|m|, |M|)$.
10. Si f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, on a[1] : f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
11. Notion de bijection f d'une partie D_1 de $\mathbb{R}$ dans une partie D_2 de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, définition de la bijection réciproque $f^{-1} : D_2 \longrightarrow D_1$.
12. Rappels sur la dérivation (pas de démonstration pour l'instant)
    (a) Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée.
    (b) Dérivée et opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit, quotient, composition.
    (c) Usage de la dérivée pour déterminer le sens de variation.
    (d) Dérivée d'une bijection réciproque. Théorème de la bijection.
13. Exemples d'études de fonctions. Études de fonctions pour établir des inégalités.

1. Résultat démontré en cours.