

Programme des colles de la semaine du 2 octobre 2023

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle. Fonctions logarithme, exponentielle, puissances

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction.
2. Opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit ; composition.
3. Graphe d'une fonction.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lien entre le graphe de f et celui de $x \mapsto f(x+a)$ et celui de $x \mapsto f(x) + a$, où $a \in \mathbb{R}$. Même chose avec $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ ou encore $a = -1$.
5. Fonctions paires, fonctions impaires. Exercice : toute fonction se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
6. Fonction périodique. Exercice : si f est T -périodique (où $T \in \mathbb{R}_+^*$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est (kT) -périodique.
7. Monotonie et stricte monotonie. Composition de fonctions monotones.
8. Fonctions majorées, fonctions minorées, fonctions bornées.
9. Fonction valeur absolue. Les résultats ci-dessous ont été vus en exercice.
 - (a) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}_+, |y| \leq M \iff -M \leq y \leq M$.
 - (b) Pour tous $y, m, M \in \mathbb{R}$, si $m \leq y \leq M$ alors $|y| \leq \max(|m|, |M|)$.
10. Si f est une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} , on a¹ : f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
11. Notion de bijection f d'une partie D_1 de \mathbb{R} dans une partie D_2 de \mathbb{R} . Dans ce cas, définition de la bijection réciproque $f^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$.
12. Rappels sur la dérivation (pas de démonstration pour l'instant)
 - (a) Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée.
 - (b) Dérivée et opérations sur les fonctions : somme, multiplication par une constante, produit, quotient, composition.
 - (c) Usage de la dérivée pour déterminer le sens de variation.
 - (d) Dérivée d'une bijection réciproque. Théorème de la bijection.
13. Exemples d'études de fonctions. Études de fonctions pour établir des inégalités.
14. Dérivées successives : notion de dérivée d'ordre k , pour $k \in \mathbb{N}$, classe C^k , classe C^∞ (on se contente des définitions pour l'instant).

Quelques fonctions usuelles

1. Logarithme népérien : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall t > -1, \ln(1+t) \leq t$.
2. Exponentielle : énumération des propriétés usuelles, graphe, inégalité¹ : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.
3. Fonctions puissances
 - (a) Cas où la puissance est un entier naturel (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (b) Notion de fonction polynomiale.
 - (c) Cas où la puissance est un entier négatif (variations, parité, limites, règles de calcul).
 - (d) Puissances non nécessairement entières : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
 - Règles de calcul usuelles.
 - Régularité sur \mathbb{R}_+^* , variations, limites, suivant les valeurs de α .
 - Prolongement en 0 quand $\alpha > 0$; dérivabilité et caractère C^1 quand $\alpha \geq 1$.
4. Croissances comparées (en 0 et en $+\infty$) ; taux d'accroissement pour \ln en 1 et pour \exp en 0.
5. Logarithme en base 2, logarithme en base 10.
6. Dérivation de $x \mapsto a^x$.

1. Résultat démontré en cours.