

Programme des colles de la semaine du 16 octobre 2023

Calculs algébriques

Sommes et produits

1. Symbole \sum
 - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
 - Relation de Chasles, sommation par paquets
 - Changement d'indice
 - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles¹ : $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a¹ : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole \prod : règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
 - Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in [0, n]$, et 0 sinon.
 - Valeur quand $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = n$.
 - Symétrie des coefficients binomiaux¹.
 - Relation¹ $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ quand $n, p \in \mathbb{N}^*$.
 - Formule du triangle de Pascal¹.
 - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton¹.

Systèmes linéaires

1. Notion de système linéaire.
2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.

Quelques propriétés de la droite réelle

1. Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Propriétés usuelles.
2. Intervalles de \mathbb{R} .
3. Valeur absolue
 - (a) Définition
 - (b) En exercice : écriture, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, de $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ à l'aide de x , y et $|x - y|$.
 - (c) Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
 - (d) Inégalité triangulaire¹. Généralisation à une somme de plus de deux termes¹.

1. Résultat démontré en cours.

- (e) Interprétation, pour $x, a \in \mathbb{R}$, de $|x - a|$ comme la distance de x à a .
4. Majorant, minorant d'une partie de \mathbb{R} . Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
 5. Maximum (plus grand élément), minimum (plus petit élément) d'une partie de \mathbb{R} .
 6. Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de \mathbb{R} .
 7. Théorème admis : si A est une partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} , alors A admet une borne supérieure dans \mathbb{R} (resp. une borne inférieure dans \mathbb{R}).
 8. Notation $\sup(A) = +\infty$ si A n'est pas majorée. Notation $\inf(A) = -\infty$ si A n'est pas minorée.
 9. Partie entière d'un nombre réel. Caractérisation avec des encadrements¹. Croissance¹ de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Graphe.