

## Programme des colles de la semaine du 16 octobre 2023

### Calculs algébriques

#### Sommes et produits

1. Symbole  $\sum$ 
  - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
  - Relation de Chasles, sommation par paquets
  - Changement d'indice
  - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles<sup>1</sup> :  $\sum_{k=0}^n k$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a<sup>1</sup> :  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ .
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole  $\prod$  : règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  si  $p \in [0, n]$ , et 0 sinon.
  - Valeur quand  $p = 0$ ,  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = n$ .
  - Symétrie des coefficients binomiaux<sup>1</sup>.
  - Relation<sup>1</sup>  $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$  quand  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .
  - Formule du triangle de Pascal<sup>1</sup>.
  - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton<sup>1</sup>.

#### Systèmes linéaires

1. Notion de système linéaire.
2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.

#### Quelques propriétés de la droite réelle

1. Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Propriétés usuelles.
2. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .
3. Valeur absolue
  - (a) Définition
  - (b) En exercice : écriture, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , de  $\max(x, y)$  et  $\min(x, y)$  à l'aide de  $x$ ,  $y$  et  $|x - y|$ .
  - (c) Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
  - (d) Inégalité triangulaire<sup>1</sup>. Généralisation à une somme de plus de deux termes<sup>1</sup>.

---

1. Résultat démontré en cours.

- (e) Interprétation, pour  $x, a \in \mathbb{R}$ , de  $|x - a|$  comme la distance de  $x$  à  $a$ .
4. Majorant, minorant d'une partie de  $\mathbb{R}$ . Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
  5. Maximum (plus grand élément), minimum (plus petit élément) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
  6. Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
  7. Théorème admis : si  $A$  est une partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  (resp. une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ ).
  8. Notation  $\sup(A) = +\infty$  si  $A$  n'est pas majorée. Notation  $\inf(A) = -\infty$  si  $A$  n'est pas minorée.
  9. Partie entière d'un nombre réel. Caractérisation avec des encadrements<sup>1</sup>. Croissance<sup>1</sup> de  $x \mapsto [x]$ . Graphe.