

Programme des colles de la semaine du 6 novembre 2023

Calculs algébriques. Trigonométrie

Sommes et produits

1. Symbole \sum
 - Règles de calcul (somme, multiplication par une constante)
 - Relation de Chasles, sommation par paquets
 - Changement d'indice
 - Sommes télescopiques
2. Sommes usuelles¹ : $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n q^k$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a¹ : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
4. Sommes doubles.
5. Produit de deux sommes. Expressions pour le développement du carré d'une somme.
6. Symbole \prod : règles de calcul, relation de Chasles, produit par paquets, produits télescopiques.
7. Factorielle d'un entier naturel.
8. Coefficients binomiaux
 - Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in [0, n]$, et 0 sinon.
 - Valeur quand $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, $p = n$.
 - Symétrie des coefficients binomiaux¹.
 - Relation¹ $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ quand $n, p \in \mathbb{N}^*$.
 - Formule du triangle de Pascal¹.
 - Corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.
9. Formule du binôme de Newton¹.

Systèmes linéaires

1. Notion de système linéaire.
2. Opérations élémentaires sur les lignes.
3. Description de l'algorithme du pivot de Gauss.
4. Application à la résolution de « petits » systèmes (deux ou trois inconnues).
5. Interprétation géométrique : intersection de droites dans le plan, intersection de plans dans l'espace de dimension 3.

Quelques propriétés de la droite réelle

1. Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Propriétés usuelles.
2. Intervalles de \mathbb{R} .
3. Valeur absolue
 - (a) Définition
 - (b) En exercice : écriture, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, de $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ à l'aide de x , y et $|x - y|$.
 - (c) Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.
 - (d) Inégalité triangulaire¹. Généralisation à une somme de plus de deux termes¹.

1. Résultat démontré en cours.

- (e) Interprétation, pour $x, a \in \mathbb{R}$, de $|x - a|$ comme la distance de x à a .
- 4. Majorant, minorant d'une partie de \mathbb{R} . Partie majorée, partie minorée, partie bornée.
- 5. Maximum (plus grand élément), minimum (plus petit élément) d'une partie de \mathbb{R} .
- 6. Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de \mathbb{R} .
- 7. Théorème admis : si A est une partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} , alors A admet une borne supérieure dans \mathbb{R} (resp. une borne inférieure dans \mathbb{R}).
- 8. Notation $\sup(A) = +\infty$ si A n'est pas majorée. Notation $\inf(A) = -\infty$ si A n'est pas minorée.
- 9. Partie entière d'un nombre réel. Caractérisation avec des encadrements¹. Croissance¹ de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Graphe.

Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique. Angles en radians.
2. Définition géométrique de cosinus et sinus. Propriétés usuelles :
 - Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$
 - Parité, périodicité, relations liées au décalage de π ou $\frac{\pi}{2}$ de l'angle
 - Angles ayant même cosinus ; même sinus
 - Valeurs classiques
 - Formules d'addition ; formules de duplication.
3. Exemples simples de résolutions d'équations ou d'inéquations trigonométriques en s'appuyant sur la lecture du cercle trigonométrique.
4. Tangente d'un angle. Propriétés usuelles du même type que celles énoncées ci-dessus.
5. Fonctions cosinus et sinus sur \mathbb{R} : graphes, dérivées.
6. Relation : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
7. Fonction tangente : ensemble de définition, périodicité, parité, classe C^∞ , dérivée, graphe.
8. Fonctions circulaires réciproques
 - Fonction Arcsin : définition, sens de variation, parité, caractère C^∞ , dérivée, graphe.
 - Fonction Arccos : définition, sens de variation, caractère C^∞ , dérivée, graphe.
 - Fonction Arctan : définition, sens de variation, limites, parité, caractère C^∞ , dérivée, graphe.

Trigonométrie hyperbolique

1. Définitions des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.
2. Pour chacune : dérivée, sens de variation, limites, parité, graphe.
3. Relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.