

Programme des colles de la semaine du 20 novembre 2023

Nombres complexes. Début du calcul de primitives.

Nombres complexes

1. Ecriture algébrique des nombres complexes.
2. Propriétés usuelles du module et de la conjugaison.
3. Inégalité triangulaire : $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$, son cas d'égalité et sa conséquence $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
4. Lieux géométriques de cercles, disques et médiatrices (*ex* : $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = 1\}$ ou $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_A| = |z - z_B|\}$).
5. Notation exponentielle $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Notation \mathbb{U} .
6. Formules d'Euler et de Moivre, applications à la linéarisation (*ex* : linéariser $\cos^2 \cdot \sin^3$) ou à l'expression de $\sin(nt)$ en fonction de $\sin(t)$ et de $\cos(t)$.
7. Technique de l'angle moitié, application aux calculs de sommes (*ex* : calcul de $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ pour $t \in \mathbb{R}$).
8. Ecriture trigonométrique des nombres complexes, notion d'argument principal.
9. Racines n -ièmes de l'unité.
 - notation \mathbb{U}_n et description de ses éléments. Cas $n \in \{2, 3, 4\}$ détaillés. Notation $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
 - propriétés élémentaires (*ex* : $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$).
 - résolution d'équations $z^n = z_0$.
10. Equations polynomiales de degré 2.
 - racines carrées complexes.
 - résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ pour $a, b, c \in \mathbb{C}$.
 - relations coefficients-racines.
11. Transformations du plan (rotations, translations, homothéties), colinéarité et orthogonalité.
12. Exponentielle complexe.

Calcul de primitives

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , I un intervalle de \mathbb{R} (non vide ou réduit à un singleton) et f une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

1. Définition d'une primitive de fonction à valeurs dans \mathbb{K} , structure de l'ensemble des primitives.
2. Primitives usuelles (*ex* : primitiver $u'e^u$, $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, $u' \cos(u)$, ... où u est dérivable).
3. Propriétés (admisses) de l'intégrale :

- linéarité.
- relation de Chasles.
- positivité et croissance.

— théorème fondamental de l'intégration et ses corollaires (*ex* : montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_x^{x^3} \frac{dt}{3+t^6}$ est de classe $C^1(\mathbb{R})$ et déterminer sa dérivée, calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{1+t^2} dt$).

4. Intégration par partie (*ex* : trouver une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ ou de $x \mapsto x \cos(x)$, calculer $\int_0^1 t^2 e^t dt$).

Le changement de variable et le calcul de primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ ou de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ne sont pas exigibles et seront au programme de colle de la semaine suivante.

1. Résultat démontré en cours.