

## Programme des colles de la semaine du 11 décembre 2023

### Équations différentielles linéaires. Ensembles

#### Équations différentielles linéaires

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1
  - Résolution de l'équation homogène
  - Résolution avec second membre. Méthode de la variation de la constante et recherche de solutions particulières pour seconds membres particuliers : produit de polynôme et de fonction exponentielle ; combinaisons linéaires de  $t \mapsto \cos(\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(\omega t)$ , où  $\omega \in \mathbb{R}$ .
  - Principe de superposition
  - Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1
  - Problèmes de recollement (ou raccordement) de solutions.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
  - Résolution de l'équation homogène : ensemble des solutions à valeurs complexes ; dans le cas de coefficients réels, ensemble des solutions à valeurs complexes et ensemble des solutions à valeurs réelles.
  - Résolution de l'équation avec second membre. Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomial, ou exponentiel, ou combinaison linéaire de  $t \mapsto \cos(\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(\omega t)$ , où  $\omega \in \mathbb{R}$ .
  - Problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (admis).

#### Ensembles

- Notion (intuitive) d'ensemble. Notation «  $x \in E$  ». Description d'un ensemble au moyen d'accolades. Ensemble vide.
- Parties d'un ensemble. Inclusion. Modèle de rédaction pour démontrer « à la main » une inclusion ; double inclusion pour montrer une égalité.
- Ensemble des parties d'un ensemble. Notation  $\mathcal{P}(E)$  pour l'ensemble des parties de l'ensemble  $E$ .
- Complémentaire d'une partie d'un ensemble
  - Si  $A$  est une partie de  $E$ , notation  $\bar{A}$  ou  $A^c$  pour le complémentaire.
  - Propriétés<sup>1</sup> :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \bar{\bar{A}} = A, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \implies \bar{B} \subset \bar{A}$ .
- Intersection de deux parties d'un ensemble  $E$  ; intersection pour une famille quelconque de parties de  $E$ .
  - Notion de parties disjointes.
  - Propriétés usuelles relatives à la manipulation des intersections (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
- Réunion de deux parties d'un ensemble  $E$  ; réunion pour une famille quelconque de parties de  $E$ . Propriétés usuelles relatives à la manipulation des réunions (commutativité, associativité, cas d'une partie incluse dans une autre, ...)
- Propriétés<sup>1</sup>
  - Complémentaire d'une intersection de deux parties
  - Complémentaire d'une réunion de deux parties
  - Distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$
  - Distributivité de  $\cup$  sur  $\cap$
- Différence  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  de deux parties d'un ensemble.
- La différence symétrique  $A \Delta B$  a été traitée en exemple.
- Notion de recouvrement disjoint (resp. de partition) d'un ensemble.
- Produit cartésien  $E \times F$  de deux ensembles  $E$  et  $F$ .
  - Si  $A$  est une partie de  $E$  et si  $B$  est une partie de  $F$ , alors<sup>1</sup>  $A \times B \subset E \times F$ .
  - Extension à la notion de  $p$ -uplet.

---

1. Résultat démontré en cours.