Lycée Honoré de Balzac
PCSI

Mars 2024

Programme des colles de la semaine du 4 mars 2024

Arithmétique. Dérivation

Arithmétique

1. Divisibilité.
2. Théorème de division euclidienne [1].
3. Plus grand diviseur commun de deux entiers non tous les deux nuls : définition comme le plus grand diviseur commun aux deux nombres, au sens de la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{Z}$.
4. Propriétés
   (a) Pour $d \in \mathbb{N}$, on a [1] $d = \mathrm{PGCD}(a,b) \iff \begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (n|a \text{ et } n|b) \Longrightarrow n|d \end{cases}$.
   (b) Propriétés d'usage, notamment : pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{PGCD}(a, b+ak) = \mathrm{PGCD}(a,b)$.
5. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.
6. Nombres premiers entre eux.
7. Le théorème de Bézout a été vu en exercice (version « théorique » et version algorithmique), et le lemme de Gauss en a été déduit.
8. Plus petit multiple commun de deux entiers non nuls. Propriétés usuelles.
9. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a [1] $\mathrm{PGCD}(a,b) \times \mathrm{PPCM}(a,b) = |ab|$. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, alors $\mathrm{PPCM}(a,b) = |ab|$.
10. Nombres premiers
    (a) Définition
    (b) Pratique du crible d'Ératosthème sur les premières valeurs
    (c) Si un nombre premier p ne divise pas un entier a, alors [1] p est premier avec a.
    (d) Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.
    (e) Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier [1].
    (f) L'ensemble des nombres premiers est infini [1].
11. Théorème d'existence et d'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
12. Conséquence pour la description de tous les diviseurs d'un entier.
13. Conséquence pour le calcul du PGCD et le PPCM de deux entiers non nuls, à l'aide des décompositions de l'un et de l'autre.
14. Nombres rationnels et nombres irrationnels.
    (a) Forme irréductible d'une fraction.
    (b) Stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme, produit et passage à l'inverse.
    (c) Nombres décimaux.

Dérivation

1. Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée ; dérivée à gauche, à droite ; interprétation géométrique.
2. Développement limité à l'ordre 1 (on n'a pas encore introduit la notation « o ») ; équivalence [1] entre l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 et la dérivabilité.
3. Dérivation et opérations sur les fonctions. Dérivée d'une composée [1]. Dérivée d'une bijection réciproque, quand f' ne s'annule pas.
4. Extrema : notions de borne supérieure, borne inférieure, maximum/minimum global/local ; point critique.
5. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et admet un extremum local en un point x_0 à l'intérieur de l'intervalle I (i.e. x_0 n'est pas une borne de I), alors [1] $f'(x_0) = 0$.
6. Théorème de Rolle [1].

1. Résultat démontré en cours.

7. Théorème des accroissements finis [1].
8. Inégalité des accroissements finis [1] : version « $m \leqslant f' \leqslant M$ » et version « $|f'| \leqslant K$ ».
9. Fonction lipschitzienne.
10. Lien entre le signe de f' et la monotonie de f sur un intervalle.
11. Théorème de la limite de la dérivée ; conséquence pour le prolongement d'une fonction de classe C^1.
12. Conséquences de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude des suites récurrentes de la forme « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ ». Contrôle de la distance entre les termes de la suite et les points fixes de f. Complément : contrôle de la distance entre deux termes de la suite.
13. Dérivées successives : fontion de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
14. Une combinaison linéaire de fonctions de classe C^k est de classe C^k. Dérivée $k^{\text{ème}}$ d'une combinaison linéaire (quand $k < \infty$).
15. Un produit de fonctions de classe C^k est de classe C^k. Formule de Leibniz [1].
16. Un quotient de fonctions de classe C^k est de classe C^k (là où il est défini).
17. Une composée de fonctions de classe C^k est de classe C^k.
18. Fonctions convexes
    (a) Définition.
    (b) Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses sécantes.
    (c) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors [1] pour tout $a \in I$, la fonction taux d'accroissement Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
    (d) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est convexe ssi [1] f' est croissante sur I.
    (e) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi [1] $f'' \geqslant 0$.
    (f) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on a l'équivalence : f est convexe ssi [1] le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.
    (g) Fonction concave. Les résultats sur les fonctions convexes restent valables en changeant le sens des inégalités.
    (h) Point d'inflexion.
19. Prolongement de la notion de dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
    (a) Rappel des résultats déjà énoncés dans le chapitre sur les nombres complexes.
    (b) Inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction de classe C^1.