

Programme des colles de la semaine du 18 mars 2024

Dérivation

1. Taux d'accroissement ; nombre dérivé ; fonction dérivée ; dérivée à gauche, à droite ; interprétation géométrique.
2. Développement limité à l'ordre 1 (on n'a pas encore introduit la notation « o ») ; équivalence¹ entre l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 et la dérivabilité.
3. Dérivation et opérations sur les fonctions. Dérivée d'une composée¹. Dérivée d'une bijection réciproque, quand f' ne s'annule pas.
4. Extrema : notions de borne supérieure, borne inférieure, maximum/global/local ; point critique.
5. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et admet un extremum local en un point x_0 à l'intérieur de l'intervalle I (i.e. x_0 n'est pas une borne de I), alors¹ $f'(x_0) = 0$.
6. Théorème de Rolle¹.
7. Théorème des accroissements finis¹.
8. Inégalité des accroissements finis¹ : version « $m \leq f' \leq M$ » et version « $|f'| \leq K$ ».
9. Fonction lipschitzienne.
10. Lien entre le signe de f' et la monotonie de f sur un intervalle.
11. Théorème de la limite de la dérivée ; conséquence pour le prolongement d'une fonction de classe C^1 .
12. Conséquences de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude des suites récurrentes de la forme « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ ». Contrôle de la distance entre les termes de la suite et les points fixes de f . Complément : contrôle de la distance entre deux termes de la suite.
13. Dérivées successives : fonction de classe C^k , avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
14. Une combinaison linéaire de fonctions de classe C^k est de classe C^k . Dérivée $k^{\text{ème}}$ d'une combinaison linéaire (quand $k < \infty$).
15. Un produit de fonctions de classe C^k est de classe C^k . Formule de Leibniz¹.
16. Un quotient de fonctions de classe C^k est de classe C^k (là où il est défini).
17. Une composée de fonctions de classe C^k est de classe C^k .
18. Fonctions convexes
 - (a) Définition.
 - (b) Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses sécantes.
 - (c) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors¹ pour tout $a \in I$, la fonction taux d'accroissement Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
 - (d) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est convexe ssi¹ f' est croissante sur I .
 - (e) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi¹ $f'' \geq 0$.
 - (f) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on a l'équivalence : f est convexe ssi¹ le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.
 - (g) Fonction concave. Les résultats sur les fonctions convexes restent valables en changeant le sens des inégalités.
 - (h) Point d'inflexion.
19. Prolongement de la notion de dérivation aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}
 - (a) Rappel des résultats déjà énoncés dans le chapitre sur les nombres complexes.
 - (b) Inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction de classe C^1 .

1. Résultat démontré en cours.