Programme des colles de la semaine du 29 avril 2024

Espaces vectoriels

1. Notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^\Omega$ où Ω est un ensemble.
3. Combinaison linéaire.
4. Sous-espace vectoriel. Caractérisations.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
6. Une intersection de sous-espace vectoriel est [1] un sous-espace vectoriel.
7. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, on définit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$; c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$. On décrit $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
8. Cas particulier des matrices : on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les combinaisons linéaires des colonnes de A sont les colonnes de la forme AX, où $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Im}(A)$ l'espace engendré par les colonnes.
9. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
10. Famille libre.
11. Une famille est liée ssi [1] l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
12. Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre ssi [1] pour tout $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
13. Cas des colonnes d'une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A, on définit $\mathrm{Ker}(A)$ et on remarque que $(C_1, \ldots, C_p)$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$.
14. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre [1].
15. Base d'un espace vectoriel : définition. Caractérisation : $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ssi pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
16. Composantes d'un vecteur dans une base.
17. Base canonique de $\mathbb{K}^n$; base canonique de $\mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$; base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
18. Pour des sous-espaces vectoriels d'espaces du type $\mathbb{K}^n$:
    (a) exercice-type : passer d'une description par équations à une description par base (et donc avec paramètres) ;
    (b) exercice-type : passer d'une description par famille génératrice (ou description paramétrique) à une description par équations ;
    (c) exercice-type : extraire une base d'une famille génératrice.

1. Résultat démontré en cours.