Équations/inéquations

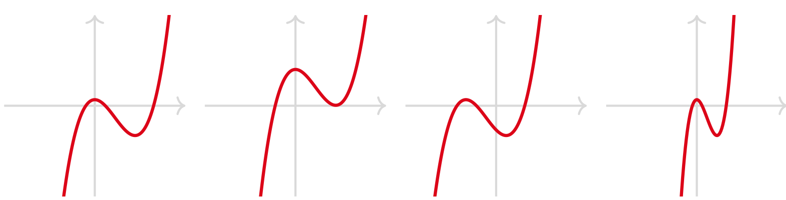
Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $x-1=\sqrt{x+2}$
2. $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0$
3. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$
4. $|3-x|=x+1$
5. $|x+4|\leqslant|2x+1|$
6. $\cos(x)\geqslant 1/2$
7. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|\leqslant 2$
8. $2^{x^2}=3^{x^3}$
9. $2\mathrm{e}^{4x}-5\mathrm{e}^{2x}+2=0$
10. $2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$
11. $\begin{cases}\ln x+\ln y &= 0\\ x+y &= 4\end{cases}$
12. $\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln 2$
13. $\operatorname{sh}(x)\leqslant 2$
14. $\begin{cases}\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y)=4\\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y)=1\end{cases}$

Exercice 2 (𝄞$\star$ Rai ©)**.** Montrer que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $|ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 3 ($\star$ Rai ©)**.** Montrer que, si x et x' sont deux réels positifs tels que $x'\leqslant x$, $\sqrt{x+x'}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{x'}$ et $\sqrt{x}-\sqrt{x'}\leqslant\sqrt{x-x'}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{x'}$

Étude de fonctions



(a) f (b) (c) (d)

Figure 1 – Le graphe de la fonction f ainsi que d'autres fonctions issues de f.

Exercice 4 ($\star$ Rai)**.** Dans la figure 1, on a dessiné le graphe d'une fonction f ainsi que plusieurs fonctions fabriquées avec f. Retrouver l'expression de ces fonctions en fonction de f.

Exercice 5 ($\star$ Cal)**.** Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous et leur parité et leur éventuelle périodicité.

1. $x\mapsto x^3-x$
2. $x\mapsto\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$
3. $x\mapsto\sqrt{x^2-1}$

Exercice 6 ($\star$ Rai, Rep ©)**.** On considère la fonction : $f\colon\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\sin(x)\cos^2(x)\end{cases}$

1. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[\,0\,;\pi\,]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.
2. Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer $f(\pi-x)$. Peut-on alors réduire l'intervalle d'étude ?

Exercice 7 ($\star$ Cal)**.** On pose $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 8 ($\star$ Rai, Rec, Com ©)**.** Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? Minorées ? Bornées ?

1. $x\mapsto\mathrm{e}^x\cos(x)$
2. $x\mapsto\dfrac{-7\sin(x^2)+2\cos(\sin(x))}{1+e^x}$
3. $x\mapsto(1+\cos x)\ln(1+x^2)$
4. $x\mapsto x+\dfrac{42}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 9 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit $f\colon x\to\dfrac{3x-2}{4x-3}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est une bijection entre deux ensembles à préciser et déterminer sa bijection réciproque.

On dit, dans ce cas, que f est une involution.

Exercice 10 (𝄞$\star$ Cal, Rai)**.** Étudier les limites en 0 de $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ et de $x\mapsto\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ainsi que de $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 11 ($\star$ Cal)**.** À l'aide d'une fonction, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}\qquad\frac{x\ln(x)}{x^2-1}<\frac{1}{2}$$

Exercice 12 (⋆⋆ Rai ©)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f est-elle périodique ? Déterminer toutes ses périodes et donner sa période fondamentale si elle existe.

Exercice 13 (⋆ Rai ©)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 5-périodique et 2-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

Exercice 14 (⋆ Cal, Com)**.** Donner l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(2 + \cos(x))$
2. $g(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
3. $h = \ln \circ \cos$
4. $i(x) = \sqrt{1 + \ln(1 - x)}$
5. $j(x) = \ln(\ln x)$
6. $k(x) = \sin\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{\cos^2(x) + 3}\right)\right)$
7. $\ell(x) = \cos^5(x)$

Exercice 15 (⋆ Rai ©)**.** Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est une bijection de $[\,1\,; +\infty\,[$ vers un intervalle à préciser. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 16 (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(x')| \leqslant \dfrac{3}{2}|x - x'|^{\frac{5}{2}}$. Montrer que f est constante.

Exercice 17 (⋆ Cal, Rai, Com)**.** Soit f la fonction définie sur $]\,0\,; \pi\,]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (*c'est la fonction sinus cardinal utilisé en physique*).

1. Montrer que f réalise une bijection de $]\,0\,; \pi\,]$ vers $[\,0\,; 1\,[$.
2. Indiquer le sens de variation de f^{-1}.
3. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $[\,0\,; 1\,[$ et calculer sa dérivée en 0.

Exercice 18 (⋆ Cal ©)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda(x) = \dfrac{x + \lambda}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que toutes les tangentes de f_λ en $x = 0$ sont parallèles.
2. Montrer que toutes les tangentes en $x = 1$ sont concourantes.

Exercice 19 (⋆ Cal, Rai ©)**.** Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 20 (⋆ Cal)**.** On pose $f(x) = x^x$.

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f et étudier les variations de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

Exercice 21 (⋆ Cal)**.** Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) < 2\ln(x) - 1$$

Fonctions trigonométriques, hyperboliques

Exercice 22 (⋆ Cal)**.** En utilisant les dérivées, établir une relation entre les fonctions : $x \mapsto \arctan(e^x)$ $\quad x \mapsto \arctan(\operatorname{sh}(x))$

Exercice 23 (⋆ Cal, Rai, Rec ©)**.**

1. Démontrer que $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
2. Démontrer que ch réalise une bijection de $[\,0\,; +\infty\,[$ vers un ensemble à déterminer.
3. Démontrer que $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer.

On note argsh, argch et argth les bijections réciproques de sh, ch (restreinte à $\mathbb{R}_+$) et th.

4. ⋆⋆ Étudier la dérivabilité argsh, argch et argth.
5. ⋆ ⋆ ⋆ Trouver une expression explicite argsh, argch et argth. utilisant le logarithme.

Exercice 24 (⋆ Cal ©)**.** Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
2. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$
3. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
4. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 < 0$
5. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{5} - x\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{5} + 3x\right)$

Pour le 3., utiliser : $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

Exercice 25 (⋆ Cal)**.** Calculer

1. $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$
2. $\arccos\left(\cos(4\pi)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arctan\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 26 (⋆ Cal)**.** On pose $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 27 (𝄞⋆ Cal)**.** Démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in [-1\,;1] \qquad \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Exercice 28 ($\star$ Cal)**.** On souhaite résoudre l'équation,notée (E), $\arccos(x) = \arcsin(2x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Si x solution de (E), montrer que $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right]$ puis que $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.
2. Soit $x \in [-1\,;1]$. Vérifier que $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$.
3. Soit $x \in [-1\,;1]$. Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. Déduire des résultats précédents que si x est solution de (E) alors $\sqrt{1-x^2} = 2x$.
5. Résoudre l'équation (E).

Exercice 29 ($\star$ Cal ©)**.** Montrer que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$.

Exercice 30 ($\star$ Cal)**.** Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})$.

Exercice 31 ($\star$ Cal)**.** Simplifier les expressions suivantes après avoir précisé l'intervalle de définition :

1. $\cos(2\arccos(x))$
2. $\cos(\arcsin(x))$
3. $\tan(\arccos(x))$
4. $\cos(\arctan(x))$

Exercice 32 ($\star$ Cal)**.** Résoudre les équations suivantes après avoir précisé les domaines de définitions :

1. $\arcsin\left(\dfrac{\tan(x)}{2}\right) = x$
2. $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \dfrac{3\pi}{4}$
3. $\arcsin(x) = \arcsin(\dfrac{16}{25}) + \arcsin(\dfrac{9}{16})$

Exercice 33 ($\star$ Cal ©)**.**

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$