

# Équations/inéquations

**Exercice 1** (★ Cal). Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les équations ou inéquations suivantes :

1.  $x - 1 = \sqrt{x + 2}$
2.  $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0$
3.  $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 2} = 1$
4.  $|3 - x| = x + 1$
5.  $|x + 4| \leq |2x + 1|$
6.  $\cos(x) \geq 1/2$
7.  $\left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| \leq 2$
8.  $2^{x^2} = 3^{x^3}$
9.  $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$
10.  $2^{2x} - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1}$
11.  $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$
12.  $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$
13.  $\text{sh}(x) \leq 2$
14.  $\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 4 \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 1 \end{cases}$

**Exercice 2** (♠★ Rai ©). Montrer que, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

**Exercice 3** (★ Rai ©). Montrer que, si  $x$  et  $x'$  sont deux réels positifs tels que  $x' \leq x$ ,  $\sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$  et  $\sqrt{x} - \sqrt{x'} \leq \sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$

# Étude de fonctions

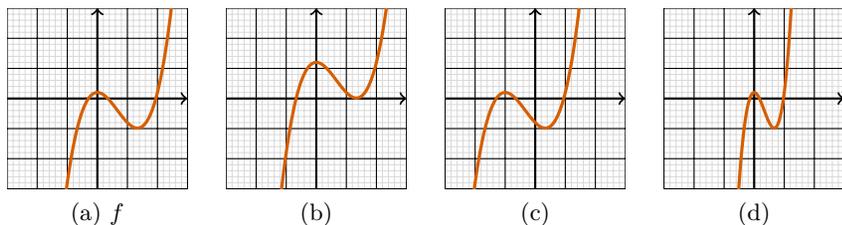


FIGURE 1 – Le graphe de la fonction  $f$  ainsi que d'autres fonctions issues de  $f$ .

**Exercice 4** (★ Rai). Dans la figure 1, on a dessiné le graphe d'une fonction  $f$  ainsi que plusieurs fonctions fabriquées avec  $f$ . Retrouver l'expression de ces fonctions en fonction de  $f$ .

**Exercice 5** (★ Cal). Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous et leur parité et leur éventuelle périodicité.

1.  $x \mapsto x^3 - x$
2.  $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$
3.  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$

**Exercice 6** (★ Rai, Rep ©). On considère la fonction :  
 $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \cos^2(x) \end{cases}$

1. Montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$  et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de  $f$  à partir de cette étude.
2. Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , calculer  $f(\pi - x)$ . Peut-on alors réduire l'intervalle d'étude ?

**Exercice 7** (★ Cal). On pose  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction  $f$ .

**Exercice 8** (★ Rai, Rec, Com ©). Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? Minorées ? Bornées ?

1.  $x \mapsto e^x \cos(x)$
2.  $x \mapsto \frac{-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))}{1 + e^x}$
3.  $x \mapsto (1 + \cos x) \ln(1 + x^2)$
4.  $x \mapsto x + \frac{42}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

**Exercice 9** (★★ Cal ©). Soit  $f: x \mapsto \frac{3x - 2}{4x - 3}$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ .
2. Justifier que  $f$  est une bijection entre deux ensembles à préciser et déterminer sa bijection réciproque.

On dit, dans ce cas, que  $f$  est une involution.

**Exercice 10** (♠★ Cal, Rai). Étudier les limites en 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  et de  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$  ainsi que de  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 11** (★ Cal). À l'aide d'une fonction, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

**Exercice 12** (★ Rai ©). Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 5 périodique et 2 périodique. Montrer que  $f$  est 1-périodique.

**Exercice 13** (★ Cal, Com). Donner l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions définies par :

- $f(x) = \ln(2 + \cos(x))$
- $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
- $h = \ln \circ \cos$
- $i(x) = \sqrt{1 + \ln(1 - x)}$
- $j(x) = \ln(\ln x)$
- $k(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{x+1}{\cos^2(x)+3}\right)\right)$
- $\ell(x) = \cos^5(x)$

**Exercice 14** (★ Rai ©). Montrer que  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  est une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle à préciser. Déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice 15** (★★ Rai ©). Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ ,  $|f(x) - f(x')| \leq \frac{3}{2}|x - x'|^{\frac{5}{2}}$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 16** (★ Cal, Rai, Com). Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; \pi]$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  (c'est la fonction sinus cardinal utilisé en physique).

- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; \pi]$  vers  $[0; 1[$ .
- Indiquer le sens de variation de  $f^{-1}$ .
- Justifier que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $[0; 1[$  et calculer sa dérivée en 0.

**Exercice 17** (★ Cal ©). Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$ .

- Montrer que toutes les tangentes de  $f_\lambda$  en  $x = 0$  sont parallèles.
- Montrer que toutes les tangentes en  $x = 1$  sont concourantes.

**Exercice 18** (★ Cal, Rai ©). Résoudre, sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'équation  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

**Exercice 19** (★ Cal). On pose  $f(x) = x^x$ .

- Trouver l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  et étudier les variations de  $f$ .
- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 20** (★ Rai). Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est strictement croissante, montrer que

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad x < x' \iff f(x) < f(x')$$

- Donner un exemple de fonction croissante mais non strictement croissante.

- Si  $f$  est croissante est-ce que que

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad x \leq x' \iff f(x) \leq f(x')$$

- Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ , montrer que  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $f(I)$  de même monotonie que  $f$ .

**Exercice 21** (★ Cal). Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) < 2 \ln(x) - 1$$

## Fonctions trigonométriques, hyperboliques

**Exercice 22** (★ Cal). En utilisant les dérivées, établir une relation entre les fonctions :  $x \mapsto \arctan(e^x)$   $x \mapsto \arctan(\text{sh}(x))$

**Exercice 23** (★ Cal, Rai, Rec ©). 1. Démontrer que  $\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective.

- Démontrer que  $\text{ch}$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  vers un ensemble à déterminer.
- Démontrer que  $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  vers un ensemble à déterminer.

On note  $\text{argsh}$ ,  $\text{argch}$  et  $\text{argth}$  les bijections réciproques de  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$  (restreinte à  $\mathbb{R}_+$ ) et  $\text{th}$ .

- ★★ Étudier la dérivabilité  $\text{argsh}$ ,  $\text{argch}$  et  $\text{argth}$ .
- ★★★ Trouver une expression explicite  $\text{argsh}$ ,  $\text{argch}$  et  $\text{argth}$ . utilisant le logarithme.

**Exercice 24** (★ Cal ©). Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

- $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
  - $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$
  - $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
  - $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 < 0$
  - $\cos\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + 3x\right)$
- Pour le 3, utiliser :  $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

**Exercice 25** (★ Cal). Calculer

- $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$
- $\arccos(\cos(4\pi))$
- $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
- $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

**Exercice 26** (★ Cal). On pose  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$ .

1. Justifier que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simplifiée de  $f$ .

- Exercice 33** (★ Cal ©). 1. Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $\text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$

**Exercice 27** (♣★ Cal). Démontrer les égalités suivantes :

1.  $\forall x \in [-1; 1] \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Exercice 28** (★ Cal). On souhaite résoudre l'équation, notée  $(E)$ ,  $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $x$  solution de  $(E)$ , montrer que  $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  puis que  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .
2. Soit  $x \in [-1; 1]$ . Vérifier que  $\sin(\arccos(x)) \geq 0$ .
3. Soit  $x \in [-1; 1]$ . Montrer que  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ .
4. Déduire des résultats précédents que si  $x$  est solution de  $(E)$  alors  $\sqrt{1-x^2} = 2x$ .
5. Résoudre l'équation  $(E)$ .

**Exercice 29** (★ Cal ©). Montrer que  $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$ .

**Exercice 30** (★ Cal). Démontrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x})$ .

**Exercice 31** (★ Cal). Simplifier les expressions suivantes après avoir précisé l'intervalle de définition :

1.  $\cos(2 \arccos(x))$
2.  $\cos(\arcsin(x))$
3.  $\tan(\arccos(x))$
4.  $\cos(\arctan(x))$

**Exercice 32** (★ Cal). Résoudre les équations suivantes après avoir précisé les domaines de définitions :

1.  $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = x$
2.  $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{16}{25}\right) + \arcsin\left(\frac{9}{16}\right)$
3.  $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$