Chapitre 10

Limite et continuité

Objectif : définir la notion de limites et prouver rigoureusement les théorèmes de limites et de continuité.
Pré-requis :

- Ensembles et applications
- Suites
- Fonctions usuelles
- Nombres réels

Table des matières

1 Limites

Soient α et β deux réels, les extrémités des intervalles $[\,\alpha\,;\beta\,]$, $[\,\alpha\,;\beta\,[$ etc. sont α et β. Les extrémités de $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ sont α et $+\infty$ etc. On note $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités. Dans tout ce chapitre, sauf exception mentionné, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un point de I ou une extrémité de I.

1.1 Rappels : opérations sur les fonctions

- Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$, alors $f+g\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases}$ et $f \times g\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\times g(x) \end{cases}$.
- Si $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$. On peut synthétiser :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

FIGURE 1 – Composition de fonctions.

Attention à la compatibilité des intervalles

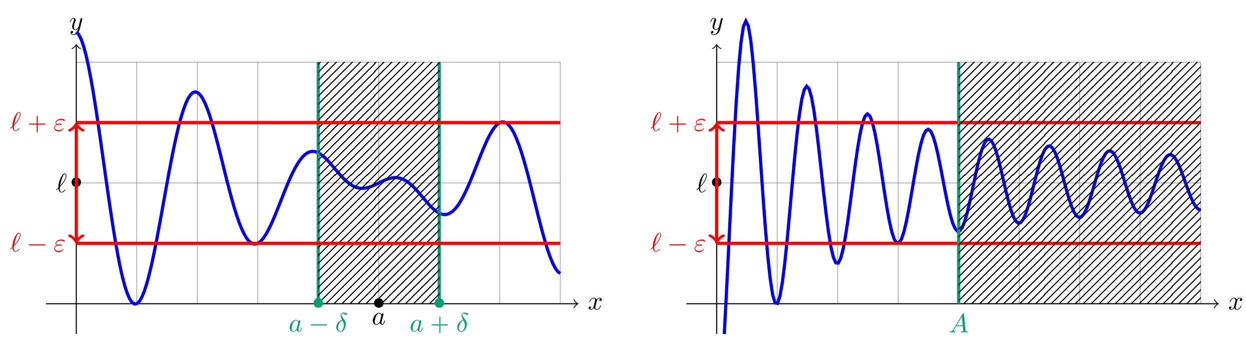
Si $g\colon J \to \mathbb{R}$, il faut f prenne ses valeurs dans J pour que $g \circ f$ ait un sens. Par exemple, si $g = \ln$ et si $f = \cos$, alors $g \circ f$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{R}_+^*$) f prend des valeurs négatives.

1.2 Définition de la limite d'une fonction

Définition d'une limite finie

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ (ou bien $f \underset{a}{\to} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \leqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$



(a) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez proche de $a \in \mathbb{R}$ ($|x-a| \leqslant \delta$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell+\varepsilon$ et $\ell-\varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(b) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez grand ($x \geqslant A$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell+\varepsilon$ et $\ell-\varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

FIGURE 2 – Illustration de la définition de la limite.

Exemple 1. Choisir l'une des 3 définitions de la limite, et nier cette définition avec des quantificateurs.

Exemple 2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition n° 1 : unicité de la limite

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Cette première définition ne concerne que les cas où la limite ℓ est finie, on peut donner des définitions adaptées dans le cas où la fonction tend vers $+\infty$, ou encore quand la fonction tend vers $-\infty$:

Définition de la limite $+\infty$ en a

On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant M$
- Cas $a = +\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M$
- Cas $a = -\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \implies f(x) \geqslant M$

Définition de la limite $-\infty$ en a

On dit que f tend vers $-\infty$ en a si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant M$
- Cas $a = +\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geqslant A \implies f(x) \leqslant M$
- Cas $a = -\infty$: $\quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \implies f(x) \leqslant M$

Exemple 3. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On a $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$

Remarque 1. Voilà qui est peu pratique : on a 9 définitions différentes pour recouvrir tous les cas. La notion de voisinage permet d'unifier les neuf définitions en une seule :

- Soit $\delta > 0$, on dit que $[\,a-\delta\,;a+\delta\,]$ est un **voisinage** de $a \in \mathbb{R}$.
  L'ensemble des voisinages de a est : $\mathcal{V}_a = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists \delta > 0 \quad V = [\,a-\delta\,;a+\delta\,]\} = \{[\,a-\delta\,;a+\delta\,] \mid \delta > 0\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $[\,M\,;+\infty\,[$ est un **voisinage** de $+\infty$.
  L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est : $\mathcal{V}_{+\infty} = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V = [\,M\,;+\infty\,[\} = \{[\,M\,;+\infty\,[\mid M \in \mathbb{R}\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $]\,-\infty\,;M\,]$ est un **voisinage** de $-\infty$.
  L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est : $\mathcal{V}_{-\infty} = \{V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V =]\,-\infty\,;M\,]\} = \{]\,-\infty\,;M\,] \mid M \in \mathbb{R}\}$

Définition unifiée de la limite

Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un point de I ou une extrémité de I. On dit que f tend vers ℓ en a si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \qquad x \in \tilde{V} \implies f(x) \in V$$

On peut condenser en : $\qquad \forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad f(I \cap \tilde{V}) \subset V$

Mais, un voisinage de l'infini n'a pas la même forme qu'un voisinage d'un réel ! De plus, cette définition peut sembler un peu abstraite. Dans la suite, on ne l'utilisera car n'est pas explicitement au programme. Dans les démonstrations, nous aurons donc parfois 9 cas à distinguer. Nous en ferons un seul, et de dirons que les autres se déduisent de la même façon.

Remarque 2. On peut aussi définir la limite avec des inégalités strictes et les voisinages avec des intervalles ouverts.

Proposition n° 2 : une limite finie en a implique bornée sur un voisinage de a

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée sur un voisinage de a :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a-\delta\,;a+\delta\,] \quad |f(x)| \leqslant N$
- Si $a = +\infty$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [\,M\,;+\infty\,[\quad |f(x)| \leqslant N$
- Si $a = -\infty$: $\quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]\,-\infty\,;M\,] \quad |f(x)| \leqslant N$

Remarque 3. Ce théorème ressemble à «toute suite convergente est bornée». Mais, f est bornée seulement sur un voisinage.

Remarque 4. Si $a \in I$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, nécessairement $\ell = f(a)$.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition de la limite à droite et à gauche d'une fonction

Soient $a \in I$ ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

1. Si a n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que que f tend vers ℓ à droite en a si $f_{|I\cap]\,a\,;\,+\infty\,[}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \ell$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$.
2. Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f tend vers ℓ à gauche en a si $f_{|I\cap]\,-\infty\,;\,a\,[}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$

Exemple 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_-$ admet-elle une limite à gauche de 0 ? Et à droite ?

Exemple 5. Soit $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Étudier les limites de f à droite et à gauche en 0.

Remarque 5. Soit $a \in \mathring{I}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$, alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite finie à droite de a une limite finie à gauche de a et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Le théorème suivant, permet de faire le lien entre limites de fonctions et limites de suites.

Théorème n° 1 : caractérisation séquentielle de la limite

Considérons a un point de I ou une extrémité et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\right)$$

Exemple 6. Comme $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on peut en déduire que $\exp(n^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple 7. La fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

1.5 Opérations sur les limites de fonctions

Proposition n° 3 : limites de la somme/du produit/du quotient

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + \ell'$ et $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$.
Si $\ell' \neq 0$, alors g est non nulle sur un voisinage de a et $f/g \xrightarrow[x\to a]{} \ell/\ell'$.

Lorsque les limites ℓ et ℓ' ne sont pas finies, on peut encore avoir certains résultats similaires SAUF DANS CERTAINS CAS APPELÉS FORMES INDÉTERMINÉES.

Proposition n° 4 : composition des limites

Soient $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y\to\ell]{} \ell'$, alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$.

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(a) Limites de la somme de deux fonctions suivant leur limite.

$\lim_{x\to a} f(x)$ \ $\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell'<0$	0	$\ell'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$+\infty$	$\ell\times\ell'$	0	$\ell\times\ell'$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
$\ell>0$	$-\infty$	$\ell\times\ell'$	0	$\ell\times\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(b) Limites du produit de deux fonctions suivant leur limite.

1.6 Théorèmes de limites

Proposition n° 5 les inégalités larges passent à la limite
Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ et $g\colon I\to\mathbb{R}$. Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$ et $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell'$, et si $f(x)\geqslant g(x)$ sur un voisinage de a, alors $\ell\geqslant\ell'$.

Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite
Même si $f(x)>g(x)$ sur un voisinage de a, on n'a pas forcément $\ell>\ell'$. Par exemple : $f\colon x\mapsto 1/x$ et $g\colon x\mapsto 1/x^2$ définies sur $[\,2\,;+\infty\,[$ avec $a=+\infty$.

Proposition n° 6 d'encadrement (ou théorème des gendarmes ou du sandwich)
Soient f, g et $h\colon I\to\mathbb{R}$. Si sur un voisinage de a, on a $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors, $h(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$.

Corollaire 1 (produit d'une fonction ayant une limite nulle par une fonction bornée)**.** Supposons que $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$ et g est bornée au voisinage de a, alors $(fg)(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$.

Proposition n° 7 de minoration/majoration par une fonction ayant une limite infinie
Soient $f,g\colon I\to\mathbb{R}$, $a\in I$ ou une extrémité de I telle que sur un voisinage de a, on ait $f(x)\leqslant g(x)$:
Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}+\infty$ alors $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}+\infty$. De même, si $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}-\infty$ alors $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}-\infty$

Théorème n° 2 de la limite monotone
Soient $I=\,]\,a\,;b\,[$ ($a<b$ avec possiblement $a=-\infty$ et $b=+\infty$) et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction **monotone**.

1. Si f est croissante sur I :
   (a) f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point $c\in\mathring{I}$, $\lim_{x\to c^-} f(x)\leqslant f(c)\leqslant\lim_{x\to c^+} f(x)$
   (b) Si f est majorée sur I, alors $f(x)\xrightarrow[x\to b^-]{}\sup f\in\mathbb{R}$. Sinon, $f(x)\xrightarrow[x\to b^-]{}+\infty$.
   (c) Si f est minorée sur I, alors $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}\inf f\in\mathbb{R}$. Sinon, $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}-\infty$
2. Si f est décroissante sur I, on en déduit un résultat équivalent.

2 Continuité en un point

2.1 Définition

Définition de la continuité en un point

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$, on dit que f est **continue** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, *i.e.* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Définition de la continuité à droite/à gauche

Si $a \in I$ sans en être une extrémité à droite. On dit que f est **continue à droite** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$.
Si $a \in I$ sans en être une extrémité à gauche. On dit que f est **continue à gauche** en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$.

Exemple 8. La fonction partie entière est-elle continue en 0 à gauche ? À droite ?

Remarque 6. Soit $a \in \mathring{I}$, f est continue en a si et seulement si f est continue en a à droite et à gauche.

Exemple 9. On pose $f(x) = x^2$ pour $x \geqslant 0$, et $f(x) = -x^3 + 2x$ si $x < 0$, f est-elle continue en 0 ?

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème n° 3 : caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

Exemple 10. $\sin(1/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Corollaire : limite possible d'une suite récurrente

Soient $f\colon I \to I$, $u_0 \in I$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple 11. Soit $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n + 1$, montrer que $(u_n)_n$ diverge.

2.3 Opérations de fonctions continues en a

Proposition n° 8 : continuité de la somme/produit/quotient de fonctions continues

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ sont continues en $a \in I$, alors $f + g$ et fg sont continues en a.
De plus, si $g(a) \neq 0$, alors f/g est définie sur un voisinage de a et est continue en a.

Proposition n° 9 : continuité de la composée de deux fonctions continues

Soient $f\colon I \to J$ continue en $a \in I$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

2.4 Prolongement par continuité

Définition d'un prolongement par continuité

Soient $a \in I$, $f\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** s'il existe un prolongement de f noté $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ continue en a.

Proposition n° 10 : existence d'un prolongement par continuité

Soient $a \in I$, $f\colon I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f.

Exemple 12. La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est prolongeable par continuité en 0.

Remarque 7. Le prolongement par continuité, quand il existe, est unique.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Définition et propriétés

Définition de la continuité sur un intervalle

On dit que f est **continue** sur I si pour tout $a \in I$, f est continue en a. On note $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, exp, cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $\alpha \geqslant 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Si $\alpha < 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $n \in \mathbb{N}$, alors $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 13. La partie entière est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Proposition n° 11 : opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Si $(f,g) \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})^2$, alors $(f+g, fg) \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})^2$. De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
Si $f \in \mathscr{C}^0(I,J)$ et $g \in \mathscr{C}^0(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Proposition n° 12 : continuité des applications lipschitziennes

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une fonction $k-$**lipschitzienne** si : $\forall (x,x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leqslant k|x-x'|$
Si f est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Exemple 14. Existe-t-il $k > 0$ tel que $f\colon x \mapsto |x|$ est-elle k-lipschitzienne ?

Remarque 8. Noter que la réciproque n'est pas vraie : $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ n'est pas k-lipschitzienne.

3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème n° 4 des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ (ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$), alors il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $y = f(x)$.

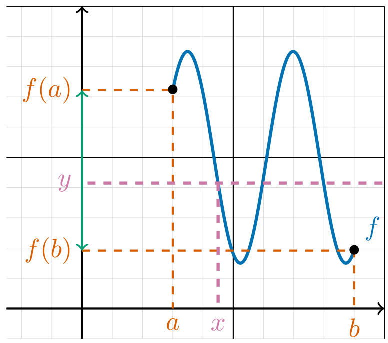


FIGURE 3 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

Le principe de dichotomie permet de calculer une approximation de x. Si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, posons $c = \dfrac{a+b}{2}$, puis calculons $f(c)$.

- Si $y \leqslant f(c)$, alors $f(a) \leqslant y \leqslant f(c)$, alors on recommence avec le segment $[\,a\,;c\,]$.
- Si $y > f(c)$, alors $f(c) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors on on recommence avec segment $[\,c\,;b\,]$.

Après suffisamment d'étapes, on obtient une approximation de x.

```
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """Renvoie une approximation de x tel que f(x)=y
    a epsilon près si y est entre f(a) et f(b)"""
    assert (f(a)<=y and y<=f(b)) or (f(b)<=y and y<=f(a))
    if f(a)<f(b):
        while b-a>=epsilon:
            c=(a+b)/2
                if y<=f(c):#y est entre f(a) et f(c)
                    b=c#On regarde f entre a et c
                else:
                    a=c#On regarde f entre c et b
    else:
        while b-a>=epsilon:
            c=(a+b)/2
            if y<=f(c):#y est entre f(b) et f(c)
                    a=c# Donc on regarde f entre a et b
            else:
                    b=c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a
```

```
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """version plus courte sans distinction de cas"""
    assert (f(a)-y)*(f(b)-y)<=0
    while b-a>=epsilon:
        c=(a+b)/2
        if (f(a)-y)*(f(c)-y)<=0:#y est entre f(a) et f(c)
            b=c# Donc on regarde f entre a et c
        else:
            a=c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a
```

```
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """par récursivité"""
    assert (f(a)-y)*(f(b)-y)<=0
    if b-a<epsilon:
        return a
    c=(a+b)/2
    if (f(a)-y)*(f(c)-y)<=0:#y est entre f(a) et f(c)
        return Dichotomie(f,a,c,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
    else:
        return Dichotomie(f,c,b,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
```

Exemple 15. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution.

Proposition n° 13 : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Corollaire : cas des fonctions strictement monotones
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ vaut suivant les cas :

Intervalle	$I = [\,a\,;b\,]$	$I = [\,a\,;b\,[$	$I =]\,a\,;b\,]$	$I =]\,a\,;b\,[$
f strictement croissante	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left[f(a)\,; \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,; f(b) \right]$	$\left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,; \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$
f strictement décroissante	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left] \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,; f(a) \right]$	$\left[f(b)\,; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$

Exemple 16. Calculer $\ln(]\,0\,;1\,])$, $\sin([\,0\,;\pi\,])$, $\sin(]\,0\,;\pi\,[)$, $\exp(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $E(\mathbb{R})$ où $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$, et E la partie entière.

Théorème n° 5 des bornes atteintes *(admis)*
Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors, $\exists (m, M) \in [\,a\,;b\,]^2 \quad \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$.

Remarque 9. On a aussi $f\left([\,a\,;b\,]\right) = [\,f(m)\,;f(M)\,]$ (l'image d'un segment par une application continue est un segment).

Remarque 10. $f(M)$ est donc la plus grande valeur que prend f et M est un point où le maximum de f est atteint.

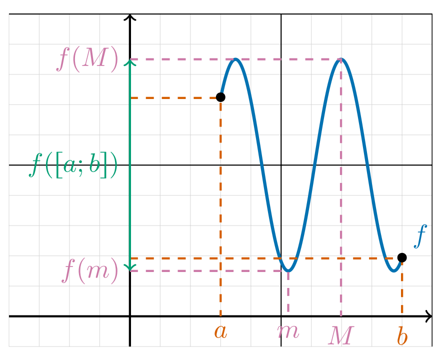


Figure 4 – Illustration du théorème des bornes atteintes.

Exemple 17. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x)/x$ définie sur $]\,0\,;\pi\,[$ est bornée.

Théorème n° 6 : de la bijection strictement monotone *(admis)*
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotone sur l'intervalle I. Alors, f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie que f.

Exemple 18. arcsin est une bijection $[\,-1\,;1\,]$ vers $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ strictement croissante et continue sur $[\,-1\,;1\,]$.

4 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

On considère maintenant $f\colon I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$ ou une extrémité de I.

Définition de la limite de f en a

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a (noté $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad x \leqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$

Définition de la continuité d'une fonction à valeurs complexes en un point ou sur un intervalle

f est dite continue en $a \in I$ si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. f est dite continue sur I si f est continue en tout $a \in I$.

Proposition nº 14 : traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire

- Pour $\ell \in \mathbb{C}$, $\quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad$ ssi $\quad \mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Im}(\ell)$
- f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Exemple 19. $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition nº 15 : une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a

Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a, alors f est bornée sur un voisinage de a.

Proposition nº 16 : opérations sur les notions de limite/continuité

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$ alors $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$, $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$, $(f/g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell/\ell'$ (si $\ell' \neq 0$).
2. Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, fg et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.
3. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})^2$, alors $f+g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas sur I) sont continues sur I.

Péril imminent certaines choses ne sont pas généralisables

Une fonction à valeurs complexes ne peut pas avoir une limite infinie. Pas de généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pas de théorème des bornes atteintes, on ne peut pas parler de fonctions monotones, ni des théorèmes d'encadrement, majoration, minoration etc.

Exemple 20. Soit $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in \mathscr{C}^0([\,0\,;\pi\,],\mathbb{C})$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, pourtant f ne s'annule pas sur $[\,0\,;\pi\,]$.