



Prérequis :

- Étude des fonctions et fonctions usuelles
- Ensembles et applications
- Nombres réels et suites numériques

Objectifs :

- Définir les notions de limites et de continuité
- Démontrer rigoureusement les théorèmes de limites et de continuité comme le théorème des valeurs intermédiaires.



Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1	Limites	2
1.1	Définition de la limite d'une fonction	2
1.2	Limite à droite, limite à gauche	4
1.3	Caractérisation séquentielle de la limite	4
1.4	Opérations sur les limites de fonctions	4
1.5	Théorèmes de limites	5
2	Continuité en un point	5
2.1	Définition	5
2.2	Caractérisation séquentielle de la continuité	6
2.3	Opérations de fonctions continues en un point	6
2.4	Prolongement par continuité	6
3	Continuité sur un intervalle	7
3.1	Définition et propriétés	7
3.2	Image d'un intervalle par une fonction continue	7
4	Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	9

1 Limites

Soient α et β deux réels, les extrémités des intervalles $[\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta[$ etc. sont α et β . Les extrémités de $[\alpha; +\infty[$ sont α et $+\infty$ etc. On note \dot{I} l'intervalle I privé de ses extrémités. Dans tout ce chapitre, sauf exception mentionné, I et J désignent des intervalles de \mathbb{R} , non vides et non réduits à un point et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et a un point de I ou une extrémité de I .

Remarque 1. Rappelons comment sont définies les opérations sur les fonctions :

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, alors $f + g: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$ et $f \times g: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \times g(x) \end{cases}$.
- Si $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, alors $g \circ f: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$. On peut synthétiser :

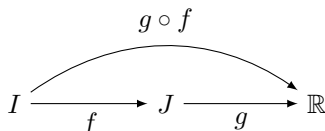


FIGURE 1 – Composition de fonctions.



Attention à la compatibilité des intervalles

Si $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, il faut f prenne ses valeurs dans J pour que $g \circ f$ ait un sens.

Par exemple, si $g = \ln$ et si $f = \cos$, alors $g \circ f$ n'est pas défini sur \mathbb{R} (ni sur \mathbb{R}_+^*) f prend des valeurs négatives.

1.1 Définition de la limite d'une fonction



Définition d'une limite finie

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ (ou bien $f \xrightarrow{a} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

(a) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez proche de $a \in \mathbb{R}$ ($|x - a| \leq \delta$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

(b) Si $\varepsilon > 0$, pour x assez grand ($x \geq A$), $f(x)$ est dans le tube délimité par $\ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon$: illustration que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

FIGURE 2 – Illustration de la définition de la limite.

Exemples 1. • Choisir l'une des 3 définitions de la limite, et nier cette définition avec des quantificateurs.

- Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.



Proposition n° 1 : unicité de la limite

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, alors $\ell = \ell'$. On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Cette première définition ne concerne que les cas où la limite ℓ est finie, adaptons ces définitions si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$:



Définition de la limite $+\infty$ en a

On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M$
- Cas $a = +\infty$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq A \implies f(x) \geq M$
- Cas $a = -\infty$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq A \implies f(x) \geq M$



Définition de la limite $-\infty$ en a

On dit que f tend vers $-\infty$ en a si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq M$
- Cas $a = +\infty$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq A \implies f(x) \leq M$
- Cas $a = -\infty$: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq A \implies f(x) \leq M$

Exemple 2. Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$

Remarque 2. Voilà qui est peu pratique : on a 9 définitions différentes pour recouvrir tous les cas. La notion de voisinage permet d'unifier les neuf définitions en une seule :

- Soit $\delta > 0$, on dit que $[a - \delta; a + \delta]$ est un **voisinage** de $a \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des voisinages de a est : $\mathcal{V}_a = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists \delta > 0 \quad V = [a - \delta; a + \delta]\} = \{[a - \delta; a + \delta] \mid \delta > 0\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $[M; +\infty[$ est un **voisinage** de $+\infty$.
L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est : $\mathcal{V}_{+\infty} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V = [M; +\infty[\mid M \in \mathbb{R}\}$
- Soit $M \in \mathbb{R}$, on dit que $] -\infty; M]$ est un **voisinage** de $-\infty$.
L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est : $\mathcal{V}_{-\infty} = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists M \in \mathbb{R} \quad V =] -\infty; M]\} = \{]-\infty; M] \mid M \in \mathbb{R}\}$



Définition unifiée de la limite

Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ un point de I ou une extrémité de I . On dit que f tend vers ℓ en a si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad \forall x \in I \quad x \in \tilde{V} \implies f(x) \in V$$

On peut condenser en :

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \quad \exists \tilde{V} \in \mathcal{V}_a \quad f(I \cap \tilde{V}) \subset V$$

Mais, un voisinage de l'infini n'a pas la même forme qu'un voisinage d'un réel ! De plus, cette définition peut sembler un peu abstraite. Dans la suite, on ne l'utilisera car n'est pas explicitement au programme. Dans les démonstrations, nous aurons donc parfois 9 cas à distinguer. Nous en ferons un seul, et de dirons que les autres se déduisent de la même façon.



Proposition n° 2 : une limite finie en a implique bornée sur un voisinage de a

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée sur un voisinage de a :

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\exists N \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \delta; a + \delta] \quad |f(x)| \leq N$
- Si $a = +\infty$: $\exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [M; +\infty[\quad |f(x)| \leq N$
- Si $a = -\infty$: $\exists N \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]-\infty; M] \quad |f(x)| \leq N$

Remarques 3. • La proposition 2 ressemble à « toute suite convergente est bornée ». Mais, f est bornée seulement sur un voisinage.

- Si $a \in I$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, nécessairement $\ell = f(a)$.

1.2 Limite à droite, limite à gauche



Définition de la limite à droite et à gauche d'une fonction

Soient $a \in I$ ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

- Si a n'est pas l'extrémité droite de I , on dit que f tend vers ℓ à droite en a si $f_{|I \cap]a; +\infty[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x > a} \ell$ ou bien $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.
- Si a n'est pas l'extrémité gauche de I , on dit que f tend vers ℓ à gauche en a si $f_{|I \cap]-\infty; a[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. On note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x < a} \ell$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$.

Exemples 3.

- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valant 0 sur \mathbb{R}_+^* et 1 sur \mathbb{R}_- admet-elle une limite à gauche de 0? Et à droite?
- Soit $f: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ définie sur \mathbb{R}^* . Étudier les limites de f à droite et à gauche en 0.

Remarque 4. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite finie à droite de a une limite finie à gauche de a et que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Le théorème suivant, permet de faire le lien entre limites de fonctions et limites de suites.



Théorème n° 1 : caractérisation séquentielle de la limite

Considérons a un point de I ou une extrémité et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \right)$$

Exemples 4.

- Comme $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on peut en déduire que $\exp(n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.
- La fonction \cos n'a pas de limite en $+\infty$.

1.4 Opérations sur les limites de fonctions



Proposition n° 3 : limites de la somme/du produit/du quotient

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$, $(f+g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'$ et $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \ell'$.
Si $\ell' \neq 0$, alors g est non nulle sur un voisinage de a et $f/g \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell/\ell'$.

Lorsque les limites ℓ et ℓ' ne sont pas finies, on peut encore avoir certains résultats similaires SAUF DANS CERTAINS CAS APPELÉS FORMES INDÉTERMINÉES.

	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$				
$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ		$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		FI	$+\infty$	$+\infty$

(a) Limites de la somme de deux fonctions suivant leur limite.

	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$						
$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$		$+\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0		FI	0	0	0	FI
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$		$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(b) Limites du produit de deux fonctions suivant leur limite.



Proposition n° 4 : composition des limites

Soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \ell'$, alors $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$.

1.5 Théorèmes de limites



Proposition n° 5 : les inégalités larges passent à la limite

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, et si $f(x) \geq g(x)$ sur un voisinage de a , alors $\ell \geq \ell'$.



Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite

Pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1}$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \not> \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1}$.



Théorème n° 2 : d'encadrement (ou théorème des gendarmes ou du sandwich)

Soient f, g et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \leq h \leq g$ sur un voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Corollaire 1. Supposons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et g est bornée au voisinage de a , alors $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.



Proposition n° 6 : minoration/majoration par une fonction ayant une limite infinie

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I telle que sur un voisinage de a , on ait $f(x) \leq g(x)$.

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$. De même, si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.



Théorème n° 3 de la limite monotone

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (avec $a < b$ et possiblement $a = -\infty$ et $b = +\infty$).

- f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point $c \in \overset{\circ}{I}$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
- Si f est majorée sur I , alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \sup f \in \mathbb{R}$. Sinon, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} +\infty$.
- Si f est minorée sur I , alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \inf f \in \mathbb{R}$. Sinon, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} -\infty$.

Si f est décroissante, on en déduit un résultat équivalent.

2 Continuité en un point

2.1 Définition



Définition de la continuité en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$, on dit que f est **continue** en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$



Définition de la continuité à droite/à gauche

Si $a \in I$ sans en être une extrémité à droite. On dit que f est **continue à droite** en a si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a).$$

Si $a \in I$ sans en être une extrémité à gauche. On dit que f est **continue à gauche** en a si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a).$$

Remarque 5. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$, f est continue en a si et seulement si f est continue en a à droite et à gauche.

Exemple 5.

- La fonction partie entière est-elle continue en 0 à gauche? À droite?
- On pose $f(x) = x^2$ pour $x \geq 0$, et $f(x) = -x^3 + 2x$ si $x < 0$, f est-elle continue en 0?

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité



Théorème n° 4 : caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, f est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(a)$.

Exemple 6. $\sin(1/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$



Proposition n° 7 : une suite récurrente convergente converge vers un point fixe

Soient $f: I \rightarrow I$, $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in I$ et f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple 7. Soit $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$, montrer que $(u_n)_n$ diverge.

2.3 Opérations de fonctions continues en un point



Proposition n° 8 : continuité de la somme/produit/quotient de fonctions continues

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $a \in I$, alors $f + g$ et fg sont continues en a .
De plus, si $g(a) \neq 0$, alors f/g est définie sur un voisinage de a et est continue en a .



Proposition n° 9 : continuité de la composée de deux fonctions continues

Soient $f: I \rightarrow J$ continue en $a \in I$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

2.4 Prolongement par continuité



Définition d'un prolongement par continuité

Soit $a \in I$. On dit que $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ est **prolongeable par continuité** s'il existe un prolongement de f sur I continue en a .

Remarque 6. Le prolongement par continuité, quand il existe, est unique.



Proposition n° 10 : existence du prolongement par continuité

Soit $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f .



Exemples de prolongement par continuité

- La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, définie sur \mathbb{R}^* , est prolongeable par continuité en 0.
- Pour quels $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ peut-on prolonger $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ en 0? On nommera p_α la fonction puissance après son éventuel prolongement en 0.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Définition et propriétés



Définition de la continuité sur un intervalle

On dit que f est **continue** sur I si pour tout $a \in I$, f est continue en a . On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans \mathbb{R} .



Exemples des fonctions usuelles

- Si $n \in \mathbb{N}$ (resp $n \in \mathbb{Z}^*$), alors $x \mapsto x^n$ est continue sur \mathbb{R} (resp. sur \mathbb{R}^*)
- Les fonctions polynomiales, exp, cos et sin sont continues sur \mathbb{R} , ln est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Z}$, alors p_α est continue sur \mathbb{R}_+ . Si $\alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z}$, alors p_α est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Exemple 8. La partie entière est-elle continue sur \mathbb{R} ?



Proposition n° 11 : opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Si $(f, g) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})^2$, alors $(f + g, fg) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})^2$. De plus, si g ne s'annule pas sur I , alors $f/g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
Si $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.



Définition des fonctions lipschitziennes

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est **k -lipschitzienne** si : $\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
Une fonction f est dite **lipschitzienne**, s'il existe $k > 0$ tel que f soit k -lipschitzienne

Exemple 9. La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle lipschitzienne ?



Proposition n° 12 : continuité des applications lipschitziennes

Si f est lipschitzienne sur I , alors f est continue sur I .

Remarque 7. Noter que la réciproque est fautive : $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}_+ n'est pas lipschitzienne.

3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue



Théorème n° 5 des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$. Si $f(a) \leq y \leq f(b)$ (ou $f(b) \leq y \leq f(a)$), alors il existe $x \in [a; b]$ tel que $y = f(x)$.

FIGURE 3 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

FIGURE 4 – Le principe de dichotomie permet de calculer une approximation de x . Dans le cas où $f(a) \leq y \leq f(b)$, posons $c = \frac{a+b}{2}$, puis calculons $f(c)$. Si $y \leq f(c)$, alors $f(a) \leq y \leq f(c)$, alors on recommence avec le segment $[a; c]$. Si $y > f(c)$, alors $f(c) \leq y \leq f(b)$, alors on recommence avec segment $[c; b]$. Après suffisamment d'étapes, on obtient une approximation de x .

```
def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """Renvoie une approximation de x tel que f(x)=y
    a epsilon près si y est entre f(a) et f(b)"""
    assert (f(a) <= y and y <= f(b)) or (f(b) <= y and y <= f(a))
    if f(a) < f(b):
        while b-a >= epsilon:
            c = (a + b)/2
            if y <= f(c):#y est entre f(a) et f(c)
                b = c#On regarde f entre a et c
            else:
                a = c#On regarde f entre c et b
    else:
        while b-a >= epsilon:
            c = (a + b)/2
            if y <= f(c):#y est entre f(b) et f(c)
                a = c# Donc on regarde f entre a et b
            else:
                b = c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a

def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """version plus courte sans distinction de cas"""
    assert (f(a) - y)*(f(b) - y) <= 0
    while b-a >= epsilon:
        c = (a + b)/2
        if (f(a) - y)*(f(c) - y) <= 0:#y est entre f(a) et f(c)
            b = c# Donc on regarde f entre a et c
        else:
            a = c#Alors, on regarde f entre c et b
    return a

def Dichotomie(f,a,b,y,epsilon):
    """par récursivité"""
    assert (f(a) - y)*(f(b) - y) <= 0
    if b-a < epsilon:
        return a
    c = (a+b)/2
    if (f(a) - y)*(f(c) - y) <= 0:#y est entre f(a) et f(c)
        return Dichotomie(f,a,c,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
    return Dichotomie(f,c,b,y,epsilon)# Donc on regarde f entre a et c
```

Exemple 10. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution.

**Proposition n° 13 : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

**Proposition n° 14 : image des fonctions strictement monotones**

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors $f(I)$ vaut :

	$I = [a; b]$	$I = [a; b[$	$I =]a; b]$	$I =]a; b[$
f strict. croissante	$[f(a); f(b)]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
f strict. décroissante	$[f(b); f(a)]$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Exemples 11. Calculer $\ln(]0; 1])$, $\sin(]0; \pi[)$, $\exp(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$, $E(\mathbb{R})$ où $f : x \mapsto e^{-x^2}$, $g : x \mapsto xe^{-x^2}$, et E la partie entière.

**Théorème n° 6 des bornes atteintes***(admis)*

Si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, alors :

$$\exists (m, M) \in [a; b]^2 \quad \forall x \in [a; b] \quad f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$

Remarque 8.

- Ainsi, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- $f(M)$ est donc la plus grande valeur de f et M est un point où le maximum de f est atteint.
- On a aussi $f([a; b]) = [f(m); f(M)]$ (l'image d'un segment par une application continue est un segment).

FIGURE 5 – Illustration du théorème des bornes atteintes.

Exemple 12. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x)/x$ définie sur $]0; \pi[$ est bornée.

**Théorème n° 7 : de la bijection strictement monotone***(continuité admise)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotone sur l'intervalle I . Alors, f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et a la même monotonie que f .

Exemple 13. \arcsin est une bijection $[-1; 1]$ vers $[-\pi/2; \pi/2]$ strictement croissante et continue sur $[-1; 1]$.

4 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

On considère maintenant $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$ ou une extrémité de I .

**Définition de la limite de f en a**

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a (noté $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$) si

- Cas $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- Cas $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
- Cas $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$



Définition de la continuité d'une fonction à valeurs complexes en un point ou sur un intervalle

f est dite **continue** en $a \in I$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. f est dite **continue** sur I si f est continue en tout $a \in I$.



Proposition n° 15 : traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire

- Pour $\ell \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ssi $\operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(\ell)$
- f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
- f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Exemple 14. $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est continue sur \mathbb{R} .



Proposition n° 16 : une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a

Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a , alors f est bornée sur un voisinage de a .



Proposition n° 17 : opérations sur les notions de limite/continuité

1. La caractérisation séquentielle de la limite/continuité se généralise *mutatis mutandis*.
2. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ alors $(f + g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'$, $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell\ell'$, $(f/g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell/\ell'$ (si $\ell' \neq 0$).
3. Si f et g sont continues en a , alors $f + g$, fg et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a .
4. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})^2$, alors $f + g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas sur I) sont continues sur I .



Péril imminent certaines choses ne sont pas généralisables

Une fonction à valeurs complexes ne peut pas avoir une limite infinie. Pas de généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pas de théorème des bornes atteintes, on ne peut pas parler de fonctions monotones, ni des théorèmes d'encadrement, majoration, minoration etc.

Exemple 15. Soit $f: x \mapsto e^{ix} \in \mathcal{C}^0([0; \pi], \mathbb{C})$, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$, pourtant f ne s'annule pas sur $[0; \pi]$.