Chapitre 9

Polynômes

Table des matières

1 Polynôme et premières propriétés **2**

1.1 Définition d'un polynôme, degré et opérations 2

1.2 Fonctions polynomiales et racines 3

1.3 Polynôme dérivé 4

2 Arithmétique des polynômes **4**

2.1 Divisiblité 4

2.2 Division euclidienne 4

2.3 Racines et divisibilité 5

2.4 Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme 5

3 Décomposition en éléments simples **7**

4 Construction des polynômes (non exigible) **8**

1 Polynôme et premières propriétés

1.1 Définition d'un polynôme, degré et opérations

Définition d'un polynôme

Un **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est un objet de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ ($n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{K}$). X est l'**indéterminée**, par convention $X^0 = 1$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes.

Remarque 1. L'indéterminée X n'est pas *vraiment* définie ici. C'est un objet formel (ce n'est pas un nombre ni une variable ni une fonction) utilisé pour définir les polynômes. De même, le nombre complexe i, qui n'est pas *vraiment* défini, vous permet de définir les complexes.

Remarque 2. Le n dépend du polynôme choisi. Par exemple, pour $2+3X$: $n = 1$, pour $1-X^4$: $n = 4$. Malheureusement, ce n n'est pas unique, en effet, on peut aussi prendre $n' = 3$ dans le premier polynôme car $2+3X = 2+3X+0X^2+0X^3$: on peut toujours prendre $n' > n$ et si besoin poser $a_k = 0$ pour $k > n$.

Remarque 3. Deux polynômes sont égaux si seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{K}[X] \qquad (P = Q \iff \forall k \in [\![0\,;n]\!] \quad a_k = b_k)$$

Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant, d'un polynôme unitaire

- Si tous les coefficients d'un polynôme sont nuls, on dit que c'est le polynôme nul, noté 0.
- Soient $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul et $d = \max\{k \in [\![0\,;n]\!] \mid a_k \neq 0\}$ de sorte que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$. L'entier d est appelé **degré** de P et est noté $d^\circ P = d$. On pose, par convention, $d^\circ 0 = -\infty$.
- On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_d. On dit que P est **unitaire** si $a_d = 1$.
- On dit que P est un **polynôme constant** si $d^\circ P \leqslant 0$, dans ce cas $P = a_0$.
- Les polynômes X^n sont appelés **monômes**.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.

Exemple 1. $d^\circ 3 =$ $\qquad d^\circ X + 2 =$ $\qquad d^\circ X^n =$ $\qquad d^\circ (aX^2 + bX + c) =$

Attention à ne pas confondre degré n et somme dont le dernier terme est X^n

L'écriture $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'implique pas $d^\circ P = n$ seulement que $d^\circ P \leqslant n$. De plus, $a_n \neq 0$ ssi $d^\circ P = n$.

Définition de somme/multiplication par un scalaire/multiplication/composée

Soient $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\tilde{P} = \sum\limits_{k=0}^{p} \tilde{a}_k X^k$, $Q = \sum\limits_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les polynômes suivants :

- $P + \tilde{P} = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k + \sum\limits_{k=0}^{p} \tilde{a}_k X^k = \sum\limits_{k=0}^{p} (a_k + \tilde{a}_k) X^k$ et $\lambda P = \lambda \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum\limits_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$
- $PQ = \sum\limits_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec pour tout $k \in [\![0\,;p+q]\!]$, $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ autrement dit

$$\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{q} b_k X^k = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$$

  On pose, par convention, $P^0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P \times P \times \ldots \times P$.
- $P \circ Q = P(Q) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k Q^k$

Remarque 4.
- Pour définir la somme de deux polynômes, il faut le même nombre de termes dans les deux sommes (quitte à rajouter des zéros manquants).
- Ce n'est pas le cas, en revanche pour le produit de deux polynômes. De plus, $c_0 = a_0 b_0$ tandis que $c_{p+q} = a_p b_q$.
- $P(X) = P$

Proposition n° 1 : propriétés des opérations sur les polynômes

Si $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors :

1. $P + Q = Q + P$ l'addition est commutative
2. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ associativité
3. $0 + P = P$ existence du neutre
4. $P + (-1) \times P = 0$ existence de l'opposé
5. $(\lambda P) \times Q = \lambda(PQ)$ $1 \times P = P$
   $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$ $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$
6. $PQ = QP$ le produit est commutatif
7. $(PQ)R = P(QR)$ le produit est associatif
8. $P(Q + R) = PQ + PR$ distributivité
9. $(P + Q)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$
   $P^n - Q^n = (P - Q) \sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

Exemple 2. Grâce à $(1 + X)^{2n}$, démontrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exemple 3. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, que penser du degré de $P + Q$, $P + R$ et PQ ?

Proposition n° 2 : propriétés sur le degré et intégrité

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

1. $d^\circ(P + Q) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ Q)$
   Si $d^\circ P \neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$
2. $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q$
3. $d^\circ \lambda P = d^\circ P$ si $\lambda \in \mathbb{K}^*$
4. $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ P \times d^\circ Q$ si Q non constant
5. Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$

Attention au degré de la somme

En général, le degré de la somme n'est pas égale à la somme des degrés ni au maximum des degrés.

1.2 Fonctions polynomiales et racines

Définition d'une fonction polynômiale

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\tilde{P}$: $\begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$ est la **fonction polynomiale** associée à P.

Remarque 5. Formellement, le polynôme P et la fonction polynomiale $\tilde{P}$ sont des objets différents. Cependant, les concours autorisent parfois de confondre les deux notions.

Remarque 6. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\widetilde{P+Q}(x) = \tilde{P}(x) + \tilde{Q}(x)$ et $\widetilde{PQ}(x) = \tilde{P}(x)\tilde{Q}(x)$, $\widetilde{P \circ Q}(x) = \tilde{P}\left(\tilde{Q}(x)\right)$.

Définition d'une racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et $x \in \mathbb{K}$, on dit que x est une racine de P si $P(x) = 0$.

Exemple 4. Est-ce que 1 est racine de $P = X^3 + X^2 - X - 1$?

Remarque 7. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pour $x_0 \in \mathbb{K}$, on peut calculer $P(x_0)$ par la méthode de Horner (moins de calculs que la méthode naïve) : $$P(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + x_0(a_3 + \dots))))$$

1.3 Polynôme dérivé

Définition de la dérivée d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P, par $$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j$$
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P^{(k)}$ comme le polynôme obtenu en dérivant k fois P : $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$

Proposition n° 3 : propriétés de la dérivée

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Si P est non constant alors $d^\circ P' = d^\circ P - 1$ de façon générale, $d^\circ P' \leqslant d^\circ P - 1$ et $d^\circ P^{(k)} \leqslant d^\circ P - k$
2. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
3. $(PQ)' = PQ' + P'Q$ de façon générale $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$
4. $(X^n)^{(k)} = 0$ si $k > n$ et $(X^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ si $k \leqslant n$.

Théorème n° 1 : formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors $$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$
En particulier, pour $a = 0$, pour tout $k \in [\![0 \,; n]\!]$, $c_k = P^{(k)}(0)/k!$.

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Divisiblité

Définition de la divisibilité

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on dit que B divise A (ou que A est multiple de B) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note $B|A$ lire «B divise A».

Exemple 5. Est-ce que $X^2 + X - 2$ est un multiple de $X + 2$? Est-ce que $X - 1 | X^n - 1$? Est-ce que $X + 1 | X^3 + 1$?

2.2 Division euclidienne

Théorème n° 2 de la division euclidienne

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \backslash \{0\})$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.
L'écriture $A = BQ + R$ s'appelle **la division euclidienne de A par B,** Q est le quotient et R le reste.

Attention à ne pas confondre la divisibilité et la division euclidienne

- La question «B divise A ?» à laquelle on répond par oui ou par non.
- La division euclidienne de A par B consiste **à trouver** Q et R tel que $A = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.

Proposition n° 4 : équivalence entre divisibilité et reste de la division euclidienne
Soit B un polynôme non nul. $B|A$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Comment calculer une division euclidienne ?
Deux méthodes :

1. Poser la division comme à l'école primaire (fonctionne si $d^\circ A$ est petit)
2. Utiliser les racines de B permet de trouver le reste.

Exemple 6. Effectuer la division euclidienne de $X^5+2X^4+X^3+2$ par X^2+1. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n+X^{n-1}+1$ par X^2-3X+2 puis par X^2-4X+4

2.3 Racines et divisibilité

Proposition n° 5 : caractérisation des racines avec la divisibilité
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le nombre a est racine de P si et seulement si $X-a|P$.

Définition de la multiplicité d'une racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La **multiplicité** (ou l'**ordre**) de a dans P est le plus grand entier m tel que $(X-a)^m$ divise P.

- Si $m=0$, a n'est pas racine de P.
- Si $m=1$, a est racine simple de P.
- Si $m=2$, a est racine double de P.

Proposition n° 6 : caractérisation d'une racine de multiplicité m
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. Sont équivalents :

1. a est racine d'ordre m
2. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$
3. Pour tout $i \in [\![0 ; m-1]\!]$, $P^{(i)}(a)=0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Exemple 7. Si $P=X^3-7X^2+15X-9$, quelles sont les multiplicités de 1, 2 et 3 dans P ?

Proposition n° 7 : racine et racine conjugué d'un polynôme réel
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ une racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P avec même multiplicité que z.

2.4 Polynômes irréductibles et factorisation d'un polynôme

Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1.
De plus, si toutes les racines sont simples, on dit qu'il est scindé à racines simples.

Exemple 8. X^2+1 est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 8. Soit P un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\lambda P | P$ et $\lambda | P$. On dit que λP et λ sont des diviseurs triviaux.

Définition d'un polynôme irréductible

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit **irréductible** si ses seuls diviseurs sont λP et λ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemple 9. $X^2 - 3X + 2$ n'est pas irréductible.

Exemple 10. Les polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ sont irréductibles.

Théorème n° 3 : théorème de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre) *(admis)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, alors P admet au moins une racine complexe.

Théorème n° 4 : factorisation d'un polynôme à coefficients réels ou complexes

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, alors il est scindé : il s'écrit sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - z_i)^{m_i}$
   Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $z_i \in \mathbb{C}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant, alors P s'écrit sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^{s} {Q_i}^{n_i}$
   Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les $x_i \in \mathbb{R}$ sont les racines (deux à deux distinctes) de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$, Q_i des polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatifs et $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 9. Un polynôme de degré n a donc n racines **complexes comptées avec multiplicité**.

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition n° 8 : irréductibilité des polynômes de $\mathbb{K}[X]$

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Proposition n° 9 : racines comptées avec multiplicité

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, x_1, x_2, ..., x_r des racines (2 à 2 distinctes) de P de multiplicités m_1, m_2, ..., m_r.

1. $\prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{m_i} | P$ En particulier, $\sum_{i=1}^{r} m_i \leqslant d^\circ P$.
2. Si $P \in \mathbb{K}_n[X] \backslash \{0\}$, P a au plus n racines. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.
3. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ si P et Q prennent les mêmes valeurs en $n+1$ réels, alors $P = Q$.

Exemple 12. Combien $P = (X^2+1)(X^2-6X+9)$ admet-il de racines réelles ? complexes ?

Exemple 13. Si $P = \lambda(X - x_1)(X - x_2)$, $Q = \mu(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, quels sont les coefficients de P ? de Q ?

Proposition n° 10 : relations coefficients-racines

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé : $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

Alors $\lambda = a_n$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n}$

Remarque 10. Dans cette proposition, on ne suppose pas que les racines sont simples, si une racine est de multiplicité 3, il y aura trois des x_k qui seront égaux.

Exemple 14. Factoriser $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Exemple 15. Soit un entier $n \geqslant 2$. Quelle est la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité ?

3 Décomposition en éléments simples

Soit A et B deux polynômes avec B non nul, on dit que la fonction $x \mapsto A(x)/B(x)$ est **une fonction rationnelle** définie sur $\mathbb{C}\backslash E$ où E est l'ensemble des racines de B. Si x est racine de B, on dit que x est un **pôle** de $x \mapsto A(x)/B(x)$ et n'est bien sûr par dans l'ensemble de définition de $x \mapsto A(x)/B(x)$.

Théorème n° 5 : décomposition en éléments simples d'une fraction à pôles simples *(admis)*
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec B scindé à racines simples, de racines $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Il existe un unique $Q \in \mathbb{K}[X]$, un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que : $\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{b_1, \ldots, b_n\}$ $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{x - b_i}$ De plus, Q est le quotient de la division euclidienne de A par B.

Comment effectuer la décomposition en éléments simples ?

1. Trouver les racines de B (et vérifier qu'il est bien à racines simples)
2. Effectuer la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, alors $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$.
3. Écrire $\dfrac{R(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{x - b_k}$ avec les b_i les racines de B.
4. Multiplier par $x - b_i$ et faire tendre x vers b_i, on trouve ainsi $\alpha_i = \ldots.$
5. Conclure que $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{x - b_k}$.

Exemple 16. Décomposer en éléments simples $x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Péril imminent à ne pas oublier la division euclidienne

Si $d^\circ A \geqslant d^\circ B$, il faut faire la division euclidienne : c'est $\dfrac{R(x)}{B(x)}$ que l'on écrit comme $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{x - b_i}$ et non $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Attention il faut que le polynôme soit scindé à racines simples pour appliquer le théorème
S'il y a une racine double cela ne fonctionne pas. Par exemple, si $B = (X - 1)(X - 1)$, vous ne pouvez pas trouver a_1 et a_2 tels que $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{a_1}{x - 1} + \dfrac{a_2}{x - 1}$. De même si B n'est pas scindé. Dans ce cas, il faudra que la forme de la décomposition en éléments simples vous soit donnée car elle n'est pas au programme.

4 Construction des polynômes (non exigible)

Dans cette partie, hors programme, nous allons donner une « *vraie* » définition des polynômes. En particulier, nous répondrons à la question suivante : mais qui est ce X ?

Définition des polynômes

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $a_n = 0$.

Remarque 11. En tant que suites, deux polynômes sont égaux si seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\forall P = (a_n)_n \quad \forall Q = (b_n)_n \qquad (P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n)$$

Définition des opérations sur les polynômes

Soient $P = (a_n)_n$ et $Q = (b_n)_n$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda P = (\lambda a_n)_n$ et $P + Q = (a_n + b_n)_n$ appartiennent dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit $P \times Q$ par : $P \times Q = (c_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On vérifie alors que λP, $P + Q$ et PQ sont bien des polynômes, *i.e.* des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemple 17. Si $P = (1, 2, 3, 0, 0, \ldots)$, plus rigoureusement, $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et pour tout entier $n \geqslant 3$, $a_n = 0$, $Q = (3, 2, 1, 2, 0, 0, \ldots,)$, $R = (1, 0, 0, \ldots)$, $S = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ et $\lambda = 2$ alors
$\lambda P = (2, 4, 6, 0, 0, \ldots)$ $\quad P + Q = (4, 4, 4, 2, 0, 0, \ldots)$ $\quad PQ = (3, 8, 14, 10, 7, 6, 0, 0, 0 \ldots)$
$R^2 = R \times R = (1, 0, 0, \ldots)$ $\quad RP = P$ $\quad S^2 = S \times S = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ $\quad S^3 = S^2 \times S = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

Proposition n° 11 : propriétés algébriques des polynômes

L'addition est commutative, associative, tout polynôme admet un polynôme opposé.
La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.
Le polynôme R est l'élément neutre pour la multiplication : pour tout polynôme P, $PR = P$.

Remarque 12. On pose $X = S = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $1 = R = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout polynôme P, on pose $P^0 = R = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P \times P \times \ldots \times P$.

Théorème n° 6 : décomposition d'un polynôme en fonction des puissances de X

Avec les notations précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = (\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit un polynôme $P = (a_n)_n$ (une suite nulle à partir du rang N), alors $P = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n X^n$.

Remarque 13. Ainsi, ici, l'identité $P = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n X^n$ n'est pas issue de la définition même d'un polynôme mais elle provient d'un théorème. Dès qu'on a posé $X = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, on décide de nommer $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation X est donc une lettre, muette, pour désigner un polynôme particulier. Le X n'est donc ni une variable, ni un nombre réel, mais une certaine suite. En particulier, on pourrait très bien poser $Y = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et dans ce cas $\mathbb{K}[Y]$ désignerait l'ensemble des polynômes. À noter que ceci est un procédé de construction pour justifier l'existence et les notations des polynômes, dans la pratique, on préfère oublier que ce sont des suites nulles à partir d'un certain rang et utiliser le X comme un objet mystère en feignant d'ignorer sa vraie nature.

Cela est très similaire à la construction de $\mathbb{C}$, on construit i comme un couple de réels et on feint d'ignorer sa vraie nature et on se réduit à l'utiliser comme un élément dans le carré vaut -1.