

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (★ Cou, Rai, Rec ©). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels (on vérifiera si ce sont ou non des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence que l'on précisera).

- L'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} et continues en 0.
- L'ensemble des fonctions monotones sur \mathbb{R} .
- L'ensemble des fonctions réelles définies sur $[1; 2]$ prenant la valeur 1 en 1.
- $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$
- $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
- $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 0\}$
- L'ensemble des suites réelles arithmétiques
- L'ensemble des suites réelles géométriques
- $\{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), f(a) = f(b)\}$
- $\{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \int_a^b f(t) dt = 0\}$
- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid f(1) = f'(1) = 0\}$
 - $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \text{ est inversible}\}$
- $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M = M^2\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$

Exercice 2 (★ Rai). 1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie à déterminer :

- Dans $E = \mathbb{R}[X] : F = \{aX^3 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
- Dans $E = \mathbb{R}^n : G = \{(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}\}$
- Dans $E = \mathbb{R}^3 : H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

$$(d) \text{ Dans } E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(e) \text{ Dans } E = \mathbb{R}^3 : R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

2. Déterminer $H \cap R$.

Exercice 3 (♠★★ Rai, Rec ©). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriel de E . Montrer que

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 4 (★★ Cou, Rai, Rec ©). Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on s'intéresse à l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ en en donnant une famille génératrice.

Exercice 5 (★★ Rai, Rec). Soit \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel E .

- Comparer $\text{vect}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ et $\text{vect}(\mathcal{F}) \cap \text{vect}(\mathcal{G})$.
- Comparer $\text{vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ et $\text{vect}(\mathcal{F}) + \text{vect}(\mathcal{G})$.

Exercice 6 (★★ Rec, Rai). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on note $F = \{x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et écrire $F = \text{vect}(\mathcal{F})$ pour une certaine famille finie \mathcal{F} .

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 7 (★ Rai ©). On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) + P(2) = 0\}$ et $G = \text{vect}(X + 3)$. Montrer que F et G sont en somme directe.

Exercice 8 (★ Rai, Cal). Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que $(1, 0, 0) \in F + G$ mais n'appartient ni à F , ni à G .
- F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 9 (\star Rai, Cal \odot). Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \text{vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$ et $G = \text{vect}((0, 1, 1), (0, 1, 0))$

1. Montrer que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à $F + G$.
2. En déduire que $F + G = E$. A-t-on $F \oplus G = E$?

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 10 (\clubsuit Rai). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E . Montrer que P et I sont supplémentaires dans E .

Exercice 11 ($\star\star$ Rai, Rec YT). Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 12 ($\star\star$ Rec, Rai). Soient l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$. $F = \{f \in E, f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \text{vect}(\cos, \sin)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 13 ($\star\star$ Rec, Rai \odot). Soient $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E . Trouver un supplémentaire de F .

Exercice 14 ($\star\star$ Rai). Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge}\}$. On pose $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$ et $G = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ est une suite constante}\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Familles libres

Exercice 15 ($\star\star$). Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille liée de vecteurs de E (un \mathbb{K} -EV). Montrer qu'il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $e_j \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$.

Exercice 16 (\clubsuit Cou, Rai). Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f: x \mapsto e^{ax}$ et $g: x \mapsto e^{bx} \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E .

Exercice 17 (\clubsuit Cou, Rai). Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f: x \mapsto |x - a|$ et $g: x \mapsto |x - b| \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E .

Exercice 18 ($\clubsuit\star\star$ Rec \odot). Généraliser l'exercice 16 (resp. 17) dans le cas de n fonctions de la forme $x \mapsto e^{a_i x}$ (resp. $x \mapsto |x - a_i|$).

Exercice 19 (\star Cal YT). Les familles suivantes sont-elles des familles libres de \mathbb{R}^3 ?

1. $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$.
2. $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$.
3. $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 20 (\star Cal \odot YT). Montrer que $(1)_n$, $(2^n)_n$ et $(3^n)_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 21 ($\star\star$ Rai, Cal). 1. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_i: x \mapsto \cos(ix)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En déduire que $(f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille libre.

Exercice 22 (\star Rai, Cal \odot). Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ on note

$$f_1 = \cos, f_2 = \sin \quad \forall x \in [0; 2\pi], f_3(x) = x \cos(x), f_4(x) = x \sin(x)$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de E .

Bases d'un espace vectoriel

Exercice 23 (\star Cal, Cou YT). Dans \mathbb{R}^3 , on pose

$$e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (0, 1, 1)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur exprimé dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base \mathcal{B}' ?

Exercice 24 (★ Cal, Cou). Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$P_1 = X^2 + 1 \quad P_2 = X^2 + X - 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^2 + X$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ un vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base \mathcal{B}' ?

Exercice 25 (★ Cal, Rai YT). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note \mathcal{C} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec M . Montrer que \mathcal{C} est un espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 26 (★ Cal, Cou). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_3, \quad f_2 = e_3 - e_1, \quad f_3 = e_1 + 2e_2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
2. Soit $x \in E$ un vecteur dont les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont connues. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base \mathcal{B}' ?

Inclassable

Exercice 27 (★★ Rec, Rai, Mod). Dans cet exercice on considère le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 , et on y définit une multiplication par :

$$\star: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (a', b')) & \longmapsto (aa' - bb', ab' + a'b) \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) * (a', b') &= (a', b') * (a, b) \\ ((a, b) * (a', b')) * (a'', b'') &= (a, b) * ((a', b') * (a'', b'')) \\ (a, b) * [(a', b') + (a'', b'')] &= (a, b) * (a', b') + (a, b) * (a'', b'') \end{aligned}$$

2. On pose $\vec{1} = (1, 0)$ vérifier $(a, b) \in \mathbb{R}^2, \vec{1} * (a, b) = (a, b)$
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, montrer qu'il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) * (a', b') = \vec{1}$.
4. On pose $\vec{i} = (0, 1)$, calculer $\vec{i} * \vec{i}$
5. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{vect}(\vec{1}, \vec{i})$.
6. À votre avis, que venons nous de faire ?