Chapitre 16
Matrices

Prérequis indispensables de ce chapitre :
- Calcul matriciel
- Polynômes
- Systèmes linéaires
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie
- Applications linéaires

Objectifs :
- Savoir écrire la matrice d'une application linéaire donnée dans des bases données.
- Savoir écrire la matrice d'un changement de base.
- Savoir appliquer la formule de changement de base.
- Savoir déterminer le rang, l'image et le noyau d'une matrice.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F, G sont trois $\mathbb{K}$-EV de dimension finie de dimensions respectives n, p et q. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ sont des bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ et $\mathscr{C}'$ sont des bases de F, $\mathscr{D}$ est une base de G. On notera les éléments de $\mathbb{K}^n$ en colonne au lieu qu'en ligne, ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1 Matrice d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

1.1 Définitions

Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_q) \in E^q$. La matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$ est appelée **matrice de la famille** $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$: $\quad \forall j \in [\![1\,;q]\!] \quad \exists!(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n \qquad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_q) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_q \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,q} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Exemples 1. • Pour $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B}$ la base canonique de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X^3 + 2, X^2 + 1, 4) =$

si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathscr{F} =$

• Si $F = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de F. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) =$ $\qquad$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}) =$

Remarques 1. • Il faut préciser la base concernée, car les coordonnées dépendent de la base.

• $\phi\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases données

On appelle **matrice de l'application** $u \in \mathscr{L}(E, F)$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de $u(\mathscr{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans la base $\mathscr{C}$ et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \qquad \text{où} \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

Lorsque $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Remarque 2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ possède $\dim(E) = n$ colonnes et $\dim(F) = p$ lignes.

Exemple 2. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto P' + P'' \end{cases}$. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème n° 1 : lien entre le calcul de $u(x)$ et AX
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $x \in E$, $y = u(x) \in F$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$, alors $Y = AX$

Exemples de matrices d'endomorphismes particuliers (homothétie, projection et symétrie)

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda I_n$.
- Soient F et G deux SEVs de E supplémentaires, $\mathscr{B}$ une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{avec } r = \dim(F)$$

1.2 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Proposition n° 1 : isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \quad u \quad \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{cases}$$ est un isomorphisme et $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Théorème n° 2 : la matrice de la composition est le produit des matrices
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$

Remarque 3. Le produit matriciel comme la composée ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.
C'est cette propriété qui justifie la définition étrange du produit matriciel.

Proposition n° 2 : matrice d'un isomorphisme
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F) = n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. u est un isomorphisme ssi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

Proposition n° 3 : cas particulier des endomorphismes
Soi $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$, posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = A^k$
2. $f \circ g = g \circ f$ ssi $AB = BA$.
3. $f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$

Remarque 4. Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on note E_ℓ le ℓ-ième vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors AE_ℓ est égale à la ℓ-ième colonne de A. De plus, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple : application linéaire canoniquement associée à A
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. La matrice de $f_A\colon X \mapsto AX \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))$ dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est A. On dit que f_A est l'**application linéaire canoniquement associée** à A.

2 Changement de bases

La matrice d'une application linéaire dépend *a priori* des bases choisies. Que se passe-t-il si on change de base ?

Définition de la matrice de passage

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. On note cette matrice $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Exemple 3. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (5, 2X - 3, 5X^2 - 2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 5. Notons que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Proposition n° 4 : inversibilité et inverse la matrice de passage

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Proposition n° 5 : formule de changement de bases pour un vecteur

Soit $x \in E$. Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$. Alors $X = PX'$

Exemples 4.
- Soit $Q = 1 + 2(X-1) + 2(X-1)^2$. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$. Quelles sont les coordonnées de Q dans $\mathscr{B}'$ et dans $\mathscr{B}$?
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathscr{B}' = ((\cos(a), \sin(a)), (-\sin(a), \cos(a))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quels sont les coordonnées de $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ dans la base canonique et dans $\mathscr{B}'$? Qu'en déduit-on ?

Moyen mnémotechnique

Pour ne pas se tromper de formule, retenir pépé : les «p» sont tous du même côté de la formule $\boldsymbol{P}$ et X**prime**. Souvent, $\mathscr{B}$ est la base canonique et donc $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est facile à déterminer contrairement à $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Proposition n° 6 : formule de changement de base pour une application linéaire

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$: $A = QA'P^{-1}$

Moyen mnémotechnique pour retenir $\boldsymbol{A = QA'P^{-1}}$

En notant A' par **À** et -1 par **MU** (moins un) : **A**ntoine = **Q**ualifié **À** **P**ouvoir **M**agouiller **U**tile.
Notez la cohérence avec l'ordre alphabétique : E est muni de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et P, F est muni de $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et Q.

Théorème n° 3 : cas particulier des endomorphismes : $\boldsymbol{E = F}$, $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, alors $A = PDP^{-1}$
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$

Remarque 6. Souvent, la base $\mathscr{B}$ sera la base canonique de E donc la matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ sera facile à obtenir. La base $\mathscr{B}'$ rendra souvent $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ agréable (matrice diagonale ou triangulaire par exemple).

Exemple 5. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ noté $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x + y \\ x + 5y \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner D la matrice de f dans cette base.
3. Calculer D^n, puis grâce à la formule de changement de base, calculer A^n. En déduire f^n.

Définition de deux matrices semblables

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Exemple 6. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = 0_2$ mais $A \neq 0_2$, montrer que A est semblable à $E_{1,2}$.

3 Noyau, image et rang d'une matrice

3.1 Définitions et propriétés du noyau, de l'image et du rang d'une matrice

Définition du noyau, image et rang de la matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle **noyau**, **image** et **rang** de la matrice A :

- $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \quad AX = 0\} = \mathrm{Ker}(f_A)$
- $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad Y = AX\} = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \mathrm{Im}(f_A)$
- $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(f_A)$

Remarque 7. Déterminer le noyau de $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ revient à résoudre un système linéaire homogène de p équations et n inconnues.

Proposition n° 7 : lien entre image (resp. noyau) de f et image (resp. noyau) de A

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $x \in E$, $y \in F$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$.

- $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff X \in \mathrm{Ker}(A)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$
- $y \in \mathrm{Im}(f) \iff Y \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$
- $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ où n est le **nombre de colonnes** de A (théorème du rang)

Péril imminent : théorème du rang (version matricielle)

Comme $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ est égal au nombre de **colonnes** de A.

Remarque 8. Cela permet d'obtenir des bases du noyau de f. Par exemple, $\mathscr{B}_K$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$ ssi $\varphi^{-1}(\mathscr{B}_K)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathscr{C}_I$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ ssi $\tilde{\varphi}(\mathscr{C}_I)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$ avec $\varphi\colon x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $\tilde{\varphi}\colon y \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$.

Exemple 7. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Calculer $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Attention si on vous demande une base du noyau ou de l'image de f

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Im}(f)$ contient des vecteurs de E/F et non des matrices colonnes.

Proposition n° 8 : propriétés du rang et de l'image

Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ sont les n colonnes de A, $L_1, \dots, L_p$ les p lignes de A.

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, C_2, \dots, C_n)$
3. $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$
4. $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$
5. Si $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$
6. Si $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$
7. $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$ *(admis)*
8. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_p)$

Exemple 8. Calcul du rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 9. Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E, alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$.

Proposition n° 9 : calcul du rang d'une matrice par échelonnement

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau).
Le rang est invariant par opérations sur les lignes et colonnes. On calcule le rang d'une matrice en l'échelonnant.

Exemple 9. Que vaut le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?

Comment déterminer sans calcul le rang, l'image et le noyau d'une matrice A ?

1. Trouver $\mathscr{F}$, une famille de colonnes de A, telle que tout autre colonne de A est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
2. Démontrer/affirmer que $\mathscr{F}$ est libre.
3. Alors, $\text{rg}(A) = |\mathscr{F}|$ et $\mathscr{F}$ est une base de $\text{Im}(A)$.
4. Si C est une colonne qui n'est pas dans $\mathscr{F}$, alors $C \in \text{vect}(\mathscr{F})$, ainsi le vecteur colonne des coefficients de liaison est un vecteur du noyau. Grâce au théorème du rang, on prouve que l'on a assez de vecteurs.

Exemples 10. Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2 Caractérisation des matrices inversibles parmi les matrices carrées

Proposition n° 10 : caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :

1. A est une matrice inversible
2. $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
3. $\text{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
4. $\text{rg}(A) = n$
5. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n$ (alors $B = A^{-1}$)
6. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n$ (alors $B = A^{-1}$)

Remarque 10. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, alors, $T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple 11. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

3.3 Retour sur les systèmes linéaires

Définition rang d'un système

On définit le rang d'un système linéaire homogène comme le rang de la matrice associée à ce système.

Remarque 11.

- Résoudre un système linéaire homogène revient à calculer le noyau d'une matrice.
- La dimension du SEV des solutions d'un système linéaire homogène est la dimension du noyau.
- Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = Y$ est compatible ssi $Y \in \text{Im}(A)$.
- Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = Y$ possède une unique solution. On dit que le système est de **Cramer**.

devilliers.loic@gmail.com

Résumé du chapitre sous forme de tableaux

Lien entre espaces vectoriels et matrices

Soient E et F, G sont trois EV de dimension finie, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ sont des bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ et $\mathscr{C}'$ sont des bases de F, $\mathscr{D}$ est une base de G.

Concept	**Monde : EV/fonction linéaire**	**Monde : Matrices**	**Lien entre les deux mondes**
Vecteur au départ	$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Vecteur à l'arrivée	$y = \sum\limits_{j=1}^{p} y_i f_i \in F$	$Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	$Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$
Image des vecteurs de la base	$u \in \mathscr{L}(E,F)$, $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$	$A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
Image d'un vecteur	$y = u(x)$	$Y = AX$	
Définition de l'image	$\mathrm{Im}(u) = \{u(x) \mid x \in E\}$	$\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$	$y \in \mathrm{Im}(u)$ ssi $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(A)$
Image	$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$	$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_n)$ où C_j = j-ième colonne de A.	
Rang	$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$	$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$	$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$
Noyau	$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$	$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$	$x \in \mathrm{Ker}(u)$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(u))$
Théorème du rang	$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$	$n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$	WARNING : n est le nombre de colonnes de A
Composition/ Produit	$v \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$	$v = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$	$AB = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u)$
Changement de base	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E où $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$	$P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
Changement de base pour un vecteur	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E et $x \in E$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$X = PX'$
Changement de base pour une application linéaire	$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ bases de E, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ bases de F	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$	$A = QA'P^{-1}$

Cas particuliers des endomorphismes

Les trois dernières lignes sont pour la seconde année.

Objets	**Endomorphisme** $E = F$ $u \in \mathscr{L}(E)$	**Matrice carrée** $n = p$ $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$	Lien $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$
Changement de base	$u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ bases de E	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$A = PDP^{-1}$
Inversibilité bijectivité	Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$	Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$	u est bijective SI ET SEULEMENT SI A est inversible et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$
Vecteur propre	$x \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$	X vecteur propre de A pour λ SI ET SEULEMENT SI x vecteur propre de u pour λ
Valeur propre	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$	λ valeur propre de A ssi λ valeur propre de u $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$
Polynôme caractéristique	$\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$	$\chi_A = \det(XI_n - A)$	$\chi_u = \chi_A$

Opérations sur les lignes/colonnes

But	**Méthode**
Résoudre un système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes du système.
Savoir si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et trouver son inverse	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes sur A et I_n jusqu'à avoir I_n B si possible, alors $B = A^{-1}$ **OU BIEN** Opérations **SEULEMENT** sur les colonnes sur A et I_n jusqu'à avoir I_n B si possible, alors $B = A^{-1}$
Trouver le rang de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Effectuer des opérations sur les lignes **ET** les colonnes jusqu'à trouver une matrice triangulaire.
Trouver le rang de $f \in \mathscr{L}(E, F)$	Poser $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et calculer $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$ par la méthode précédente.
Trouver le rang de $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E	Soit $\mathscr{B}$ une base de E, prendre $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et calculer $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$.
Calculer le déterminant de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$	Effectuer des opérations sur les lignes **et** les colonnes jusqu'à trouver une matrice triangulaire (**attention**, échanger deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1).