



## Prérequis :

- Calculs matriciels
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie
- Applications linéaires
- Matrice d'applications linéaires

## Objectifs :

- Donner une définition du déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme ou d'une famille de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$ .
- Grâce au déterminant, déterminer (d'où le nom) si la matrice carrée est inversible, si l'endomorphisme est bijectif ou si la famille de  $n$  vecteurs est une base.

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Déterminant en dimension 2</b>   | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Déterminant en dimension 3</b>   | <b>2</b> |
| <b>3</b> | <b>Déterminant en dimension <math>n</math></b>                                  | <b>3</b> |
| 3.1      | Existence du déterminant et premières propriétés . . . . .                      | 3        |
| 3.2      | Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne . . . . . | 4        |
| <b>4</b> | <b>Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme</b>              | <b>4</b> |
| <b>5</b> | <b>Méthodes</b>   | <b>5</b> |
| <b>6</b> | <b>Interprétation du déterminant</b>  | <b>6</b> |
| <b>7</b> | <b>Complément (hors programme) : calcul de <math>\det(A + \lambda B)</math></b> | <b>7</b> |

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 1 Déterminant en dimension 2



**Définition du déterminant d'une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$**

On définit le **déterminant** de  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  par  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .



**Proposition n° 1 : propriétés du déterminant en dimension 2**

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (1)$$

- $$\forall a, c \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{le déterminant est } \mathbf{alterné}) \quad (2)$$

- À  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  fixé,  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  est linéaire, à  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  fixé,  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  est linéaire (le déterminant est **bilinéaire**)

$$\forall a, a', b, b', c, c', d, d', \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} \quad (4)$$

- Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda M) = \lambda^2 \det(M)$ .
- Ajouter à une colonne une autre colonne multiplié par un scalaire ne change pas le déterminant :

$$\forall a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (5)$$



**Proposition n° 2 : inverse d'une matrice de taille  $2 \times 2$**

Une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si  $\det(M) = ad - bc \neq 0$ . Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.** Le déterminant est donc une fonction certaines propriétés algébriques. Y a-t-il d'autres fonction avec les mêmes propriétés ?



**Proposition n° 3 : unicité du déterminant en dimension 2**

Toute fonction de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  satisfaisant (2), (3) et (4) est proportionnel au déterminant.  
La fonction déterminant est la seule fonction de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  satisfaisant (1), (2), (3) et (4).

## 2 Déterminant en dimension 3



**Définition du déterminant en dimension 3 (Sarrus)**

Pour  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ , on note 
$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$



### Proposition n° 4 : propriétés du déterminant

Soit  $M = (C_1|C_2|C_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  où  $C_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $M$ .

- $\det(I_3) = 1$ .
- Le déterminant est **alterné** :  $\det(C_1|C_1|C_3) = \det(C_1|C_2|C_2) = \det(C_1|C_2|C_1) = 0$
- $\det: \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est **trilinéaire** :  $C \mapsto \det(C|C_2|C_3)$ ,  $C \mapsto \det(C_1|C|C_3)$ ,  $C \mapsto \det(C_1|C_2|C)$  sont des formes linéaires sur  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \det(\lambda M) = \lambda^3 \det(M)$ .



### Proposition n° 5 : unicité du déterminant en dimension 3

Tout fonction de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  trilinéaire et alternée est proportionnelle au déterminant.

Le déterminant est la seule fonction de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  trilinéaire, alternée et valant 1 en  $I_3$ .

## 3 Déterminant en dimension $n$

### 3.1 Existence du déterminant et premières propriétés



#### Définition d'une forme $n$ -linéaire et alternée

Soit  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est

1.  **$n$ -linéaire** si pour tout  $M = (C_1|C_2|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ X \mapsto f(C_1|\dots|C_{i-1}|X|C_{i+1}|\dots|C_n) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

2. **alternée** : si pour tout  $M = (C_1|\dots|C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et s'il existe  $i \neq j$  avec  $C_i = C_j$ , alors  $f(M) = 0$ .



### Théorème n° 1 : existence et unicité du déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(admis)

Il existe une unique fonction  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  alternée,  $n$ -linéaire telle que  $f(I_n) = 1$ ,  $f$  est notée  $\det$  et est appelée **déterminant**. De plus, toute fonction  $n$ -linéaire et alternée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  est proportionnel à  $\det$ .

**Remarque 2.** Si  $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ ,  $\det(A) = a$ .



### Proposition n° 6 : propriétés du déterminant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

1. Si deux colonnes de  $A$  sont égales, alors  $\det(A) = 0$ .
2. Si une colonne de  $A$  est nulle, alors  $\det(A) = 0$ .
3. Si  $M$  est obtenue en multipliant une colonne de  $A$  par  $\lambda$ , alors  $\det(M) = \lambda \det(A)$
4. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
5. Si  $M$  est obtenue en échangeant deux colonnes de  $A$  alors  $\det(M) = -\det(A)$ .
6. Si  $M$  est obtenue en faisant  $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$  à  $A$  alors  $\det(M) = \det(A)$  (ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas le déterminant).



### Péril imminent : le déterminant n'est pas linéaire

⚡ En général,  $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$ ,  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ . Prendre  $A = E_{1,1}$  et  $B = E_{2,2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

**Proposition n° 7 : déterminant d'une matrice triangulaire**Si  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire (voire diagonale),

$$\det(T) = \prod_{i=1}^n T_{i,i} = T_{1,1}T_{2,2} \dots T_{n,n}$$

**Exemple 1.** 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

**Proposition n° 8 : déterminant du produit et de l'inverse**Soient  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on a :

1.  $\det(MN) = \det(M) \det(N)$
2.  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  ssi  $\det(M) \neq 0$
3.  $\text{rg}(M) < n$  ssi  $\det(M) = 0$ .
4. Si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$

**Exemple 2.** Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

**Proposition n° 9 : une matrice et sa transposée ont même déterminant***(admis)*Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 

$$\det(M^T) = \det(M)$$

Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes, et alternée en ses lignes.

### 3.2 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

**Définition des mineurs d'une matrice**

Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ . On note  $\Delta_{i,j}$ , le mineur d'indice  $(i, j)$ , i.e le déterminant de la matrice, de taille  $n - 1$ , où on a enlevé la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $M$ .

**Théorème n° 2 : développement d'une matrice selon une ligne ou une colonne***(admis)*Soit  $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on peut développer  $\det(M)$  suivant la  $i$ -ième ligne : 
$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{i,j} \Delta_{i,j}$$
- Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on peut développer  $\det(M)$  suivant la  $j$ -ième colonne : 
$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} M_{i,j} \Delta_{i,j}$$

**Remarque 3.** Faire apparaître des 0 sur une ligne ou une colonne permet de calculer un déterminant en développant sur cette ligne/colonne.

**Exemple 3.** 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

## 4 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

**Définition déterminant d'une famille de vecteurs**

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . On appelle déterminant de  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , le déterminant de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ , on le note  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ .



### Proposition n° 10 : propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  de dimension  $n$ , alors :

- $\mathcal{F} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est  $n$ -linéaire alternée et  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .
- Si  $f: E^n \rightarrow \mathbb{K}$  est  $n$ -linéaire et alternée, alors  $f$  est proportionnel à  $\det_{\mathcal{B}}$ .
- Si  $f: E^n \rightarrow \mathbb{K}$  est  $n$ -linéaire et alternée et  $f(\mathcal{B}) = 1$ , alors  $f = \det_{\mathcal{B}}$ .
- Si  $\mathcal{B}'$  base de  $E$ , alors  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .
- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est une famille liée.

**Exemple 4.** Pour tout  $u, v \in \mathbb{K}^2$  on a :

$$\det(u, v) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad u = \lambda v \quad \text{ou} \quad v = \lambda u \quad (6)$$

**Exemple 5.** La famille  $\mathcal{B}' = (X^2, X^2 + 2, X^2 + X + 3)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ ? Comparer  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  et  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}')$ .



### Définition du déterminant d'un endomorphisme

| Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ , on note  $\det(f)$  cet élément.

**Exemple 6.** Quel est le déterminant de l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  :  $\varphi: M \mapsto M^T$  ?.



### Proposition n° 11 déterminant de la composée et de l'inverse

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  :

- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- $f$  est bijective si et seulement si  $\det(f) \neq 0$ . Dans ce cas  $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ .

## 5 Méthodes



### Échelonner

| On effectue des opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à la rendre triangulaire et en calculer son déterminant.



### Faire apparaître pleins de zéros

| Par des opérations sur les lignes et les colonnes, on peut faire apparaître un maximum de zéros avant de développer sur la ligne ou la colonne qui en a le plus.



### Raisonner par récurrence

| Essayer d'exprimer un déterminant en dimension  $n$  en fonction du même déterminant en dimension  $n - 1$  puis procéder par récurrence.



### À quoi ça sert le déterminant ?

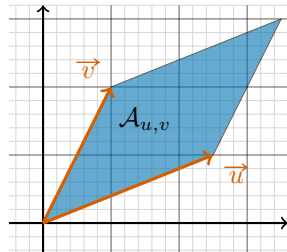
| Savoir si une matrice est inversible, savoir si un endomorphisme en dimension finie est un automorphisme, savoir si une famille de  $n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie  $n$  est une base.

## 6 Interprétation du déterminant

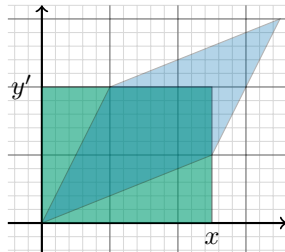


### Proposition n° 12 : aire du parallélogramme et valeur absolue du déterminant

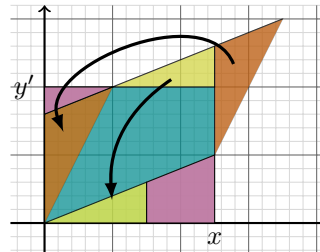
Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{A}_{u,v}$  l'aire du parallélogramme engendré par  $u$  et  $v$ , alors  $\mathcal{A}_{u,v} = |\det(u, v)|$ .



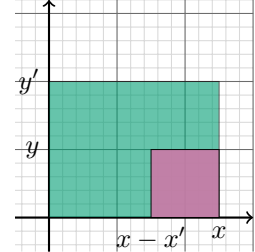
(a) Le parallélogramme formé par  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$ .



(b) En vert, le rectangle d'aire  $xy'$ .



(c) Le parallélogramme, découpé en morceaux, inséré dans le rectangle. Ainsi  $\mathcal{A}_{u,v} = xy' - \mathcal{A}_{\text{violet}}$ .



(d) Après un dernier découpage, l'aire en violet vaut  $x'y$ .

FIGURE 1 – Démonstration de la formule dans le cas où  $x \geq x'$  et  $y' \geq y$ . Les autres cas sont similaires.

**Remarque 4.** Sans la valeur absolue, le déterminant renvoie l'aire « algébrique » du parallélogramme. Plus précisément,  $\det(u, v)$  est positif (respectivement négatif) si l'angle  $(u, v)$  est direct (respectivement indirect).

**Remarque 5.** De même qu'en dimension 2,  $|\det(u, v, w)| = \mathcal{V}(u, v, w)$  (voir figure 2).

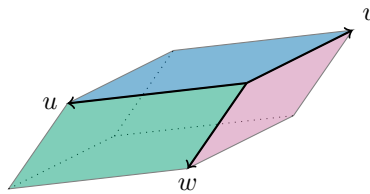


FIGURE 2 – Parallélépipède formé par  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 6.** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . La famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  engendre un parallélépipède en dimension  $n$  de volume 1, et  $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est le volume du parallélépipède  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ . Le déterminant indique de combien l'application  $f$  a multiplié le volume.

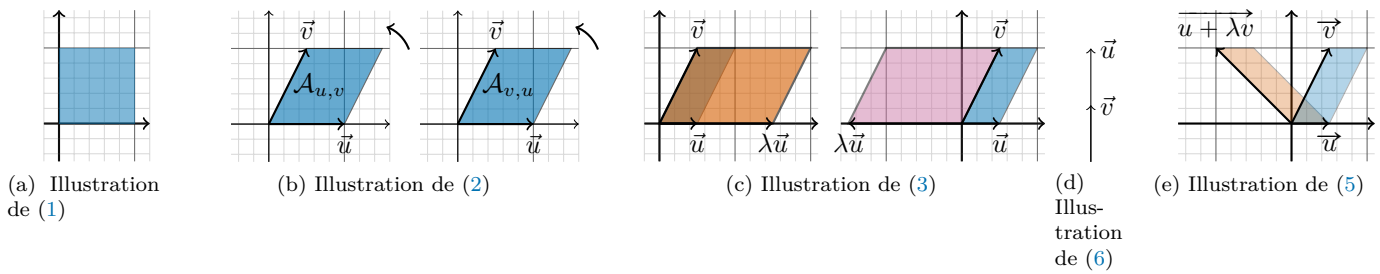


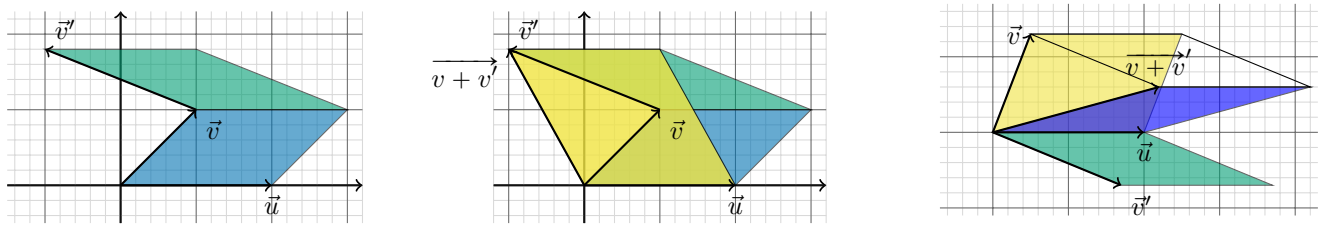
FIGURE 3 – Illustration des propriétés algébriques (1), (2), (3), (6) et (5) du déterminant avec les aires des parallélogrammes correspondants, (4) est illustrée figure 4. À la figure 3a, l'aire du carré de côté 1 vaut 1.

À la figure 3b, si on échange  $u$  et  $v$  dans le déterminant, l'aire du parallélogramme est la même, mais l'orientation est inversée. Ici,  $\det(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$  tandis que  $\det(\vec{v}, \vec{u}) \leq 0$ .

L'aire du parallélogramme engendré par  $\lambda u$  et  $v$  vaut  $|\lambda|$  fois celui engendré par  $u$  et  $v$ . Le parallélogramme orange ( $\lambda \geq 0$ ) et violet ( $\lambda \leq 0$ ) ont même aire mais une orientation différente.

À la figure 3d, lorsque deux vecteurs sont colinéaires, le parallélogramme qu'ils engendrent a une aire nulle.

À la figure 3e, les deux parallélogrammes ont  $\vec{u}$  comme base commune et ont même hauteur donc même aire.



(a) En bleu, un parallélogramme définie par  $u$  et  $v$ , en vert un parallélogramme définie par  $u$  et  $v'$ .  
 (b) En jaune, un parallélogramme définie par  $u$  et  $v + v'$ . On a le même sens :  $\mathcal{A}_{u, v+v'} \neq \mathcal{A}_{u, v} + \mathcal{A}_{u, v'}$ .  
 (c) Attention, si  $(u, v)$  et  $(u, v')$  n'ont pas le même sens :  $\mathcal{A}_{u, v+v'} = \mathcal{A}_{u, v} - \mathcal{A}_{u, v'}$ . Tout étant dit :  $\det(u, v + v') = \det(u, v) + \det(u, v')$ . Ici on a  $\mathcal{A}_{u, v+v'} = \mathcal{A}_{u, v} - \mathcal{A}_{u, v'}$  et  $\det(u, v + v') = \det(u, v) + \det(u, v')$ .

FIGURE 4 – Addition des aires des parallélogrammes si même orientation, soustraction des aires des parallélogrammes sinon. Finalement, le déterminant est une notion qui se comporte mieux que l'aire, car  $\det(u, v + v') = \det(u, v) + \det(u, v')$  est toujours vraie contrairement à  $\mathcal{A}_{u, v+v'} = \mathcal{A}_{u, v} + \mathcal{A}_{u, v'}$ .

## 7 Complément (hors programme) : calcul de $\det(A + \lambda B)$

Notons  $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices données par leurs colonnes et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Comme le déterminant n'est pas linéaire, on sait que  $\det(A + \lambda B)$  peut être différent de  $\det(A) + \lambda \det(B)$ . Dans ces conditions, comment calculer  $\det(A + \lambda B)$  ?

Avant de donner le cas général, prenons le cas de  $A = (C_1, C_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et  $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , alors, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, puis par rapport à la deuxième on obtient (on indique en **rouge** la colonne par rapport à laquelle on va utiliser la linéarité).

$$\begin{aligned}
 \det(A + \lambda B) &= \det(C_1 + \lambda \tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2) \\
 &= \det(C_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2) \\
 &= \det(C_1, C_2) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2) + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) \\
 &= \det(A) + \lambda [\det(C_1, \tilde{C}_2) + \det(\tilde{C}_1, C_2)] + \lambda^2 \det(B)
 \end{aligned}$$

Prenons maintenant le cas de  $A = (C_1, C_2, C_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  et  $B = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
 \det(A + \lambda B) &= \det(C_1 + \lambda \tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
 &= \det(C_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
 &= \det(C_1, C_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
 &\quad + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3 + \lambda \tilde{C}_3) \\
 &= \det(C_1, C_2, C_3) + \lambda \det(C_1, C_2, \tilde{C}_3) + \lambda \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3) + \lambda^2 \det(C_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) + \lambda \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3) \\
 &\quad + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_3) + \lambda^2 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3) + \lambda^3 \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) \\
 &= \det(A) + \lambda [\det(C_1, C_2, \tilde{C}_3) + \det(C_1, \tilde{C}_2, C_3) + \det(\tilde{C}_1, C_2, C_3)] \\
 &\quad + \lambda^2 [\det(C_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3) + \det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3) + \det(\tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_3)] + \lambda^3 \det(B)
 \end{aligned}$$

Les termes devant le  $\lambda$  sont donc des déterminants de matrices qui contiennent deux colonnes de  $A$  et une colonne de  $B$ . Les termes devant le  $\lambda^2$  sont des déterminants de matrices qui contiennent une colonne de  $A$  et deux colonnes de  $B$ .

Le cas général, consistera donc à développer selon chaque colonne, on aura ainsi une somme de déterminant de matrices où chaque matrice aura des colonnes de  $A$  et des colonnes de  $B$ . Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , on note  $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  la matrice  $A$  à laquelle on a remplacé la  $i_j$ -ième colonne de  $A$  par la  $i_j$ -ième colonne de  $B$ . Alors on peut montrer que :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \det(A + \lambda B) = \det(C_1 + \lambda \tilde{C}_1, C_2 + \lambda \tilde{C}_2, \dots, C_n + \lambda \tilde{C}_n) &= \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda^k \det(M_{i_1, i_2, \dots, i_k}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda^k \det(\dots, \tilde{C}_{i_1}, \dots, \tilde{C}_{i_2}, \dots, \tilde{C}_{i_k}, \dots)
 \end{aligned}$$

En fait quand on développe en utilisant la linéarité, on se retrouve avec une somme de déterminant de matrices, dont les colonnes sont soit celles de  $A$  soit celles de  $B$ , l'indice  $k$  représente le nombre de colonnes de  $B$  utilisées. Afin de mieux visualiser cette formule, on peut écrire les premiers et derniers termes

$$\begin{aligned}
 \det(A + \lambda B) &= \underbrace{\det(C_1, C_2, \dots, C_n)}_{k=0} + \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n \det(C_1, \dots, \tilde{C}_i, \dots, C_n)}_{k=1} + \lambda^2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(\dots, \tilde{C}_i, \dots, \tilde{C}_j, \dots)}_{k=2} \\
 &\quad + \lambda^3 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j < \ell \leq n} \det(\dots, \tilde{C}_i, \dots, \tilde{C}_j, \dots, \tilde{C}_\ell, \dots)}_{k=3} + \dots + \lambda^n \underbrace{\det(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n)}_{k=n} \\
 &= \det(A) + \lambda \sum_{i=1}^n \det(C_1, \dots, \tilde{C}_i, \dots, C_n) + \lambda^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(\dots, \tilde{C}_i, \dots, \tilde{C}_j, \dots) \\
 &\quad + \lambda^3 \sum_{1 \leq i < j < \ell \leq n} \det(\dots, \tilde{C}_i, \dots, \tilde{C}_j, \dots, \tilde{C}_\ell, \dots) + \dots + \lambda^n \det(B)
 \end{aligned}$$

1. Les plus exigeants voudront une preuve, qu'à cela ne tienne : c'est une récurrence finie avec l'hypothèse  $\mathcal{P}(p)$  : « $\det(A + \lambda B) = \sum_{k=0}^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} \lambda^k \det(\dots, \tilde{C}_{i_1}, \dots, \tilde{C}_{i_k}, \dots, C_{p+1} + \lambda \tilde{C}_{p+1}, \dots, C_n + \lambda \tilde{C}_n)$ »,  $\mathcal{P}(1)$  se montre en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne. Pour  $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , on suppose  $\mathcal{P}(p)$  vraie, et on utilise la linéarité par rapport à la  $p+1$ -ième colonne (la colonne à partir duquel il reste encore une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  et  $B$ ).