Chapitre 20
Intégration

Prérequis :
- Les outils de calculs d'intégrales et de primitives : IPP, changement de variable, primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Connaître les primitives de références.

L'objectif de ce chapitre est de donner une définition rigoureuse de l'intégrale et de prouver les outils de calculs d'intégrales.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

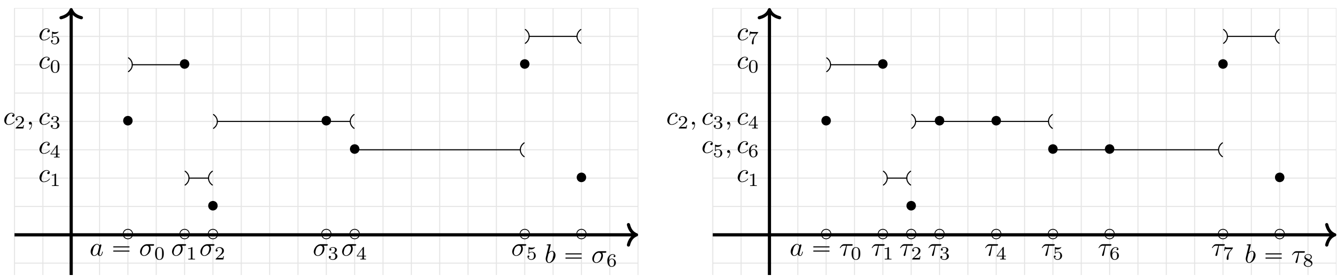
Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, $I = [\,a\,;b\,]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition d'une fonction en escalier

On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **est une fonction en escalier** s'il existe $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = b$ tels que f soit constante sur chaque intervalle $]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[$: $\forall i \in [\![\,0\,;n-1\,]\!] \quad \exists c_i \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \,]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[\quad f(x) = c_i$

On dit que $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est une **subdivision adaptée** à f. On note $\rho = \max(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$ le pas de la subdivision.



(a) σ une subdivision de I adaptée à f. (b) τ une autre subdivision de I aussi adaptée à f.

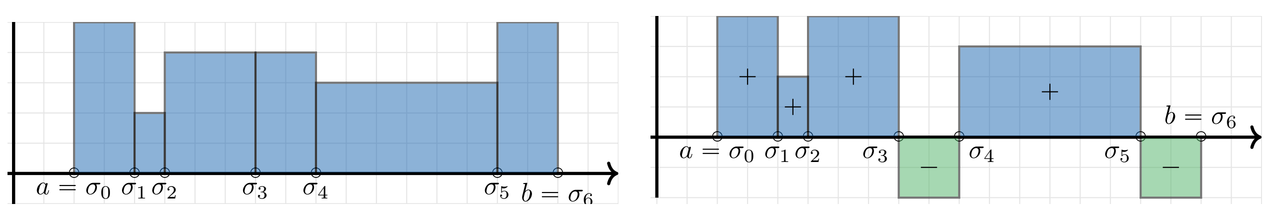
FIGURE 1 – Une fonction en escalier, et deux subdivisions adaptées. Les parenthèses signifient qu'on ne prend pas le bord de l'intervalle. Les valeurs de la fonction aux points de la subdivision sont représentées en $\bullet$.
Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée.

Proposition n° 1 : structure des fonctions en escalier

L'ensemble des fonctions en escalier sur I, noté $\mathscr{E}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ une subdivision adaptée à f. Notons c_i la valeur de f sur $]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[$. On définit l'intégrale de f sur I par : $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \times (\sigma_{k+1} - \sigma_k)$.



(a) Si la fonction est positive, l'intégrale est définie comme la somme des aires des rectangles. (b) Si la fonction prend des valeurs négatives, l'intégrale est définie comme la somme des aires algébriques des rectangles.

FIGURE 2 – On définit l'intégrale comme la somme des aires des rectangles, attention si la valeur de la constante est négative, l'aire est comptée négativement.

Remarque 1. Si $f \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})$, alors on peut montrer que $\displaystyle\int_I f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie.
On remarque que l'intégrale de f ne dépend pas de la valeur de f aux points de la subdivision.

Proposition n° 2 : propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Pour tous $(f,g) \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ i.e. $h \longmapsto \displaystyle\int_I h$ est une forme linéaire sur $\mathscr{E}(I,\mathbb{R})$
2. Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ *(positivité)*
3. Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ *(croissance)*
4. Pour $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(Chasles)*
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$ *(inégalité triangulaire)*
6. Si $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ **sauf en un nombre fini de points**

2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue et propriétés

Théorème n° 1 : approximation par des fonctions par défaut ou par excès *(admis)*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On note $m(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b g,\ g \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R}),\ g \leqslant f\right\}$ et $M(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b g,\ g \in \mathscr{E}(I,\mathbb{R}),\ g \geqslant f\right\}$.

L'ensemble $m(f)$ (resp. $M(f)$) a une borne supérieure (resp. inférieure), de plus : $\sup m(f) = \inf M(f)$.

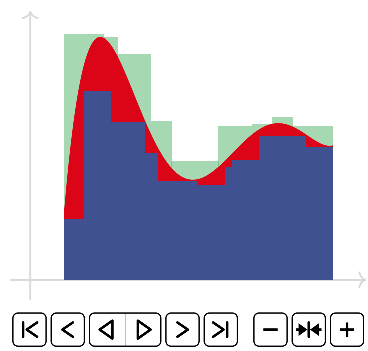


FIGURE 3 – La fonction f, ainsi que deux fonctions en escalier une plus grande que f l'autre plus petite.

Définition de l'intégrale d'une fonction continue

On définit l'intégrale de $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ par $$\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\ m(f) = \inf M(f).$$

Remarque 2. Si f est constante, alors elle est à la fois en escalier et à la fois continue, ainsi l'intégrale de f a été définie de deux façon différentes. Heureusement, ces deux définitions coïncident dans le cas des fonctions constantes.

Proposition n° 3 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment

Pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
2. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Croissance : si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
4. Chasles : pour $c \in I$ on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
5. Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Proposition n° 4 : nullité de l'intégrale et fonctions positives

1. Si f est continue sur I, positive sur I et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $\int_a^b f > 0$
2. Si f est continue sur I, positive sur I et si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

Attention aux fonctions en escalier

La proposition 4 est vraie avec des fonctions continues, elle est fausse avec des fonctions en escalier.

Remarque 3.

- La proposition 4 s'adapte si f est négative.
- Si $a > b$, on pose $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Mais la croissance, la positivité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire ne sont plus valables. En cas de doute, et quitte à rajoutez un moins, changez les bornes de l'intégrale de façon à obtenir des bornes dans le bon sens.
- Si $a = b$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (par convention).
- On l'a vu, l'intégrale d'une fonction en escalier est la somme des aires de ses rectangles. Cependant, cette aire est comptée négativement lorsque la fonction prend des valeurs négatives. C'est la même chose pour les fonctions continues.

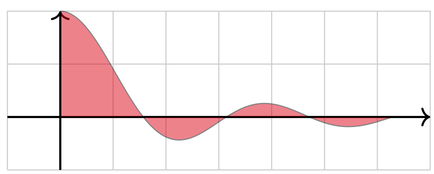


Figure 4 – Les aires des parties sous la courbe comptent négativement dans le calcul de l'intégrale.

- Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$.

3 Calculs d'intégrales

3.1 Intégrales et primitives

Définition d'une primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème n° 2 fondamental de l'analyse

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Posons, pour $x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0.
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Proposition n° 5 : calcul d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et F une primitive de f, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Exemple 1.
- Montrer que $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.
- De même avec $x \mapsto \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$.
- Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est T-périodique et $a \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

Comment étudier la dérivabilité de fonctions définies par des intégrales ?

- Si $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ avec f continue, alors, d'après le théorème fondamental de l'analyse, φ est une primitive de f, donc φ est dérivable et $\varphi' = f$.
- Si $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ avec f continue, alors f admet une primitive, notée F, $\varphi(x) = F(b(x)) - F(a(x))$, ainsi, si a et b sont des fonctions dérivables, alors par composée et différence, φ est dérivable et

$$\varphi' : x \mapsto b'(x)F'(b(x)) - a'(x)F'(a(x)) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$$

Remarque 4. On pose, pour $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, ainsi ln est une fonction dérivable et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. Avec cette dérivée, on prouve ensuite que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, et que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On pose $\exp = \ln^{-1}$. Avec le théorème de la dérivée de la bijection réciproque, $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^{-1} = \exp(x)$. On a donc démontré l'existence (admise auparavant) du logarithme et de l'exponentielle.

3.2 Révision des primitives de référence

3.3 Révision de la méthode des intégrales des fractions rationnelles

3.4 Intégration par parties/changement de variable

Théorème n° 3 d'intégration par parties

Soit $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})^2$, alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Théorème n° 4 de changement de variable

Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(\varphi([\,a\,;b\,]), \mathbb{R})$, alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Exemple 2. Si $f \in \mathscr{C}^0([\,-a\,;a\,], \mathbb{R})$ est paire, alors $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$, si f est impaire alors $\int_{-a}^a f = 0$.

4 Somme de Riemann

Théorème n° 5 des sommes de Riemann *(admis sauf version f C-lipschitzienne)*

Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$$

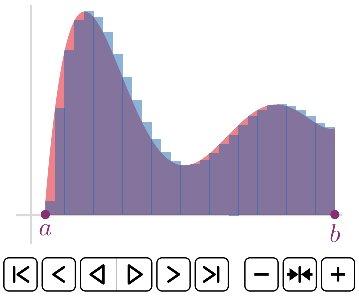


FIGURE 5 – La fonction f et son approximation par une somme de Riemann

Remarque 5. La démonstration montre la vitesse de convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale. Dans la pratique, $a = 0$ et $b = 1$, ainsi les termes de la somme sont de la forme $f(k/n)/n$

Exemple 3. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2$.

5 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{C})$, alors on définit l'intégrale de f sur I par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x.$

Proposition n° 6 : propriétés encore vraies pour l'intégrale des fonctions complexes
La linéarité, l'inégalité triangulaire (avec des modules), l'IPP, le changement de variable, le théorème fondamental de l'analyse, le théorème de Riemann sont encore vrais.

Proposition n° 7 : inégalité des accroissements finis pour $f\colon I \to \mathbb{C}$
Soient $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{C})$ et M tel que $|f'| \leqslant M$, alors pour tout $(x, x') \in [\,a\,;b\,]^2$, $\quad |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$.

6 Formule de Taylor reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème n° 6 formule de Taylor avec reste intégral
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Pour tout $b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 6. Ce théorème donne l'écart entre $f(b)$ et le polynôme du développement limité de f en a sous la forme d'une intégrale (en générale difficile à calculer). Par contre, ici b est fixé et ne tend pas forcément vers a.

Exemple 4. Majorer $|\sin(x) - x + x^3/6|$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant -1/2$.

Théorème n° 7 : inégalité de Taylor-Lagrange

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$. Pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$