

Primitives

Exercice 1 (★ Cal). Pour chacune des fonctions (on précisera les intervalles au besoin), calculer une primitive.

- a) $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ f) $t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+6}$ j) $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$
 b) $t \mapsto \cos^3(t)$ g) $t \mapsto \frac{1}{t^2-4t+4}$ k) $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$
 c) $t \mapsto \cos(t)^{2024} \sin(t)$ h) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$
 d) $t \mapsto t \arctan(t)$
 e) $f: t \mapsto \frac{1}{t^2-5t+6}$ i) $t \mapsto \frac{e^{2t}}{e^t+1}$ l) $t \mapsto \frac{1}{t \ln^{2024}(t)}$

Exercice 2 (★ Cal, Rec, Rai). Grâce à un changement de variable calculer

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \text{ Que peut-on en conclure ?}$$

Exercice 3 (★ Cal). Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-3}^3 |x-2| dx \quad 2. \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t) dt \quad 3. \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} dx$$

Exercice 4 (★ Cal). On pose $g(x) = \int_x^{x^2} e^{e^t} dt$.

1. Montrer que g est définie sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le signe de g .
3. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 5 (★ ©). Pour $x \in]0;1[$, on pose $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $]0;1[$.
2. Montrer que φ se prolonge par continuité en 0.
3. Dérivée φ sur $]0;1[$.

Exercice 6 (★ Cal, Rai ©). Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

Exercice 7 (★★ Rec ©). 1. Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_a^b f = \int_a^b |f| \text{ si et seulement si } f \text{ est positive.}$$

2. Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

3. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 8 (★★ Rec). Étudier la dérivabilité de $x \mapsto \int_0^1 e^{xt^2} dt$

Exercice 9 (★★ Rai, Cal). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x E(t) dt$

1. Montrer que F est continue sur \mathbb{R} .
2. Calculer $F(x)$ pour $x \in [0; 3]$.
3. F est-elle une primitive de la fonction partie entière ?

Sommes de Riemann

Exercice 10 (★ Rai). Trouver la limite de des suites définies par :

$$1. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \quad 3. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2} \quad 5. \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$$

$$2. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} \quad 4. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2+kn} \quad 6. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/2n)}{n}$$

Exercice 11 (★ Rai). Trouver un équivalent de $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+3k)^3}$

Exercice 12 (♠★★ Rai, Rec ©). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$,

1. Factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [0; \pi]$, $a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.
3. Calculer $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt$

Exercice 13 (★★ Rec ©). Soit $g: [0; 1] \rightarrow [a; b]$ une fonction continue et $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que $\int_0^1 g(x) dx \in [a; b]$ et que $\varphi\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(g(x)) dx$ (utiliser le résultat de l'exercice 30 du TD11).

Taylor reste intégral

Exercice 14 (★★ Cal ©). On pose $f: t \mapsto \ln(1+t) \in \mathcal{C}^\infty(]-1; +\infty[)$.

1. Calculer $f^{(k)}$ et trouver le maximum de $|f^{(k)}|$ sur $[0; 1]$

2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = 0$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$$

Exercice 15 (♯★ Rai, Rec ©). Montrer que la suite $(u_n)_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, converge vers e .

Résultats théoriques sur l'intégration

Exercice 16 (♯★ Rai, Rec ©). Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$, montrer que

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 17 (♯★★ Rai, Rec). Montrer que le résultat de l'exercice 16 est encore vrai si $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$.

Exercice 18 (♯★★ Rai, Rec ©). Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})^2$, on suppose que f est positive. Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(c) \int_a^b f(t) dt$$

Exercice 19 (★★ Rai, Rec ©). Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ montrer que si $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 20 (★★ Rai, Rec ©). Posons la fonction $f: x \mapsto x \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer les variations de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Exercice 21 (★★★ Rai, Rec ©). 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un

unique $a(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{a(x)} e^{t^2} dt = 1$.

- Montrer que $x \mapsto a(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Donner un équivalent de $a(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Sujet de concours

Exercice 22 (♯♯♯★★ Rai, Rec, Cal ©). Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.
- Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
- Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
- En déduire que $(W_n)_n$ est une suite convergente.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Que vaut cette constante ?
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
- En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.
- En déduire un équivalent de W_n , quelle est la limite de W_n ?
- Déterminer une expression explicite de W_{2n} et W_{2n+1} .
- En admettant (provisoirement) que $n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour un certain $C > 0$, trouver C^1 .

1. Cet équivalent s'appelle la formule de Stirling.