



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Univers, évènements, variable aléatoire</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Espaces probabilisés</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Probabilité conditionnelle</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Loi d'une variable aléatoire</b>	<b>4</b>
4.1	Définition et propriétés . . . . .	4
4.2	Lois usuelles . . . . .	5
4.3	Couple de variables aléatoires . . . . .	6
4.4	Généralisation à un $n$ -uplet de variables aléatoires . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Indépendance</b>	<b>7</b>
5.1	Indépendance de deux évènements . . . . .	7
5.2	Indépendance de $n$ évènements . . . . .	7
5.3	Indépendance de deux variables aléatoires . . . . .	8
5.4	Indépendance de $n$ variables aléatoires . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Espérance et Variance</b>	<b>9</b>
6.1	Espérance . . . . .	9
6.2	Variance . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Tableau récapitulatif des lois usuelles</b>	<b>13</b>

# 1 Univers, évènements, variable aléatoire

## Définition : vocabulaire probabiliste

Soit  $\Omega$  un ensemble fini que l'on appelle **univers**.

1. Un sous-ensemble de  $\Omega$  est appelé **évènement**. L'ensemble de tous les évènements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
2. Les singletons de  $\Omega$  sont appelés **évènements élémentaires**.
3. L'évènement  $\Omega$  est appelé **évènement certain**, l'évènement  $\emptyset$  est appelé **évènement impossible**.
4. Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements,  $A \cup B$  (reps.  $A \cap B$ ) est appelé évènement « $A$  ou  $B$ », (resp. « $A$  et  $B$ »).
5. Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que les évènements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles**.
6. L'évènement  $\bar{A}$  est appelé **évènement contraire** de  $A$ .

**Exemple 1.**

- On lance un dé à six faces, qui est  $\Omega$ ? quelles sont les évènements élémentaires? quel est l'évènement «le résultat est pair»?
- On lance  $n$  fois un dé et on note  $S_k$  l'évènement «le dé a fait un six lors du  $k$ -ième lancer». Donner  $\Omega$ , écrire explicitement  $S_k$ . Écrire, en fonction de  $S_k$  les évènements «on a obtenu un six lors des deux premiers lancers», «on a obtenu un six à chaque lancer», «on n'a jamais obtenu un six», «on a obtenu au moins une fois un six», «on a obtenu au moins deux six d'affilée».

## Définition d'un système complet d'évènements

Un **système complet d'évènements** est formé d'évènements  $A_1, A_2, \dots, A_p$  deux à deux incompatibles tels que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^p A_i.$$

**Exemple 2.** Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , alors les évènements  $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$  forment un système complet d'évènements.

**Exemple 3.** Les évènements «la face du dé est pair» et «la face du dé est impair» forment un système complet d'évènement.

## Définition d'une variable aléatoire

Une application  $X: \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{cases}$  où  $E$  est un ensemble est appelée **variable aléatoire** sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ .

**Remarque 1.** On remarque *malicieusement* qu'une variable aléatoire n'est n'a rien d'aléatoire et n'a rien d'une variable...

**Exemple 4.**

1. On lance deux dés et on note  $X_1$  : somme des résultats obtenus.
2. On lance  $n$  dés et on note  $X_2$  : nombre de 6 obtenus.
3. On tire au hasard simultanément 3 boules d'une urne qui contient 3 boules blanches et 3 rouges et on note  $X_3$  : nombre de boules rouges.

À partir de maintenant  $X: \Omega \rightarrow E$  est une variable aléatoire.

## Définition vocabulaire

1.  $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$  est appelé **univers image**.
2. Soit  $B \subset E$ , on note l'évènement  $(X \in B) = \{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$ .
3. Pour  $x \in E$ , on note l'évènement  $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ .
4. Si  $E = \mathbb{R}$ , on note l'évènement  $(X < x) = X^{-1}(]-\infty; x[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}$ , idem pour  $(X \geq x)$  etc.

**Exemple 5.** Déterminer l'univers image pour les trois variables aléatoires définies précédemment. Déterminer les évènements  $(X_1 = 7)$ , puis  $(X_2 = 0)$

## 2 Espaces probabilisés



### Définition d'une probabilité sur un univers fini

Une application  $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ , telle que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ , si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  est appelée probabilité sur  $\Omega$ . Le couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  est appelé **espace probabilisé**.

**Exemple 6.** L'application  $\mathbb{P}: A \mapsto |A|/|\Omega|$  est une probabilité sur  $\Omega$ , appelée **probabilité uniforme sur  $\Omega$** .

**Remarque 2.** Il faut bien comprendre que ce qui compte, ce n'est pas tant l'ensemble  $\Omega$ , mais bien la probabilité qu'on attribue aux évènements. Par exemple, si on lance un dé,  $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ , si le dé est équilibré alors  $\mathbb{P}$  sera la probabilité uniforme, mais sinon ce sera une autre probabilité.



### Définition d'une distribution de probabilités

Une **distribution de probabilité** sur  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est une famille de réels positifs  $(p_1, \dots, p_n)$  de somme 1.



### Proposition n° 1 : une probabilité est entièrement caractérisée par sa distribution de probabilité

Soit une distribution de probabilité  $(p_1, \dots, p_n)$  sur  $\Omega$ . Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  telle que  $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

**Exemple 7.** Considérons un dé et donc  $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/12$  et  $p_6 = 7/12$ , alors il existe une probabilité tel que la probabilité de tirer six soit  $7/12$  contre  $1/12$  pour les autres faces.

À partir de maintenant,  $(\Omega, \mathbb{P})$  désigne un espace probabilisé.



### Proposition n° 2 : propriétés des probabilités

Soit  $A, B, A_1, \dots, A_n$  des évènements.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$  | 6. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  |
| 2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  | 7. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ |
| 3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$                 | 8. Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles,                           |
| 4. Si $B \subset A$ alors $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ | alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ |
| 5. Si $B \subset A$ , alors $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$ (croissance)           |   |

## 3 Probabilité conditionnelle



### Définition d'une probabilité conditionnelle

Soit  $B$  un évènement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , on définit la **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant  $B$  par  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ .

**Exemple 8.** On lance un dé à six faces équilibré, quelle est la probabilité de tirer un nombre pair sachant que l'on a tiré un nombre premier ?



**Proposition n° 3 : la probabilité conditionnelle est une probabilité**

Si  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors  $\mathbb{P}_B$  est une probabilité.

**Remarque 3.** Si  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors on a toujours  $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ .  
Si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , on pose, par convention,  $\mathbb{P}(A|B) = 0$ , ainsi la relation  $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$  reste vraie.



**Théorème n° 1 : formule des probabilités totales**

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  un système complet d'évènements. Pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

**Exemple 9.** On tire deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant  $x$  boules rouges et  $y$  boules bleues. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit bleue ?



**Théorème n° 2 : formules des probabilités composées**

Soient  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et une famille d'évènements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^k A_i}(A_{k+1})$$

**Exemple 10.** On tire successivement et sans remise trois billes d'une urne contenant  $x$  billes rouges et  $y$  bleues. Quelle est la probabilité que les deux premières soient rouges mais pas la dernière ?



**Théorème n° 3 : formule de Bayes**

Soit  $B$  un évènement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Exemple 11.** Supposons qu'une personne sur mille soit atteinte par une maladie, et que l'on ait un test pour savoir si un patient est infecté :

- Si le patient est malade, le résultat sera positif avec une probabilité de 99/100.
- Si un patient est sain, le résultat sera négatif avec une probabilité de 95/100 .

Supposons que le test d'un patient soit positif, quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ?

## 4 Loi d'une variable aléatoire

### 4.1 Définition et propriétés



**Proposition n° 4 : système complet d'évènements associé à une variable aléatoire**

Soit une VA  $X: \Omega \rightarrow E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , alors  $((X = e_1), \dots, (X = e_n))$  est un SCE appelé SCE des valeurs possibles de  $X$ . En particulier,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = e_i) = 1 \quad \text{pour } A \subset E, \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{e \in A} \mathbb{P}(X = e)$$

$\mathbb{P}_X: A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$  est une probabilité et est déterminée par  $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ .



### Définition de la loi de probabilité

| Soit  $X$  une variable aléatoire de  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $E$ . La loi de  $X$  est la famille  $(\mathbb{P}_X(\{x\}))_{x \in E}$ .

**Remarque 4.** Trouver la loi de probabilité de  $X$  revient à déterminer la valeur de  $\mathbb{P}(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .

**Exemple 12.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X_1$  définie précédemment.

**Remarque 5.** Étant donnée une distribution de probabilités sur  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  notée  $(p_1, \dots, p_n)$ , il existe une variable aléatoire  $X$  une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $E$  telle que  $\mathbb{P}(X = e_i) = p_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

**Exemple 13.** Ainsi, il existe une variable aléatoire réelle  $X$  sur  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = 1/4$  et  $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$  sans avoir à définir  $X$  ou  $\Omega$ . D'ailleurs, souvent, cela ne nous importera peu.



### Définition de deux variables aléatoires de même loi

| Si  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ , alors on note  $X \sim Y$

**Exemple 14.** Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$  (on dit que  $X$  est une VA de Rademacher), quelle est la loi de  $Y = -X$  ?



**Attention : avoir la même loi ne veut pas dire être égales**

> Si  $X \sim Y$ , cela ne signifie pas que  $X = Y$



### Définition de l'image d'une variable aléatoire

| Soit  $f: E \rightarrow F$ . Alors  $f \circ X$ , est une nouvelle VA, notée  $f(X)$  et appelée **variable aléatoire image**.



### Proposition n° 5 : probabilité de l'image d'une variable aléatoire

Soient  $X$  une variable sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $E$  et  $f: E \rightarrow F$  et  $Y = f \circ X = f(X)$  alors :  $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$  et

$$\forall y \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

**Exemple 15.** On reprend l'exemple de  $X_3$ . On associe un gain algébrique à ce tirage nommé  $G$  : on gagne 2 euros par boule rouge obtenue et on perd 1 euro par boule non rouge. Définir  $G$  en fonction de  $X_3$  et déterminer  $G(\Omega)$  ainsi que sa loi. Idem si on considère que le gain est donné par : le carré de la différence entre un et nombre de boules rouges.


## 4.2 Lois usuelles




### Définition de la loi uniforme (modélise le tirage au hasard de façon équitable)

| Soit  $X$  une variable de  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans un ensemble fini  $E$  On dit que  $X$  suit une **loi uniforme** sur  $E$  si pour tout  $e \in E$ ,  $\mathbb{P}(X = e) = \frac{1}{|E|}$ . On note  $X \sim \mathcal{U}(E)$ .

**Exemple 16.** Si  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ , alors  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

 **Définition de la loi de Bernoulli (modélise une expérience à 2 issues)**

On dit que  $X$  suit la **loi de Bernoulli** de paramètre  $p \in [0; 1]$  si  $\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$ . On note  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

 **Définition d'une loi binomiale (compte les succès dans  $n$  VA de Bernoulli indépendantes)**


Si pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , on dit que  $X$  suit une loi **binomiale** de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$ . On note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

**Remarque 6.** Si une variable  $X$  compte le nombre de succès de  $n$  VA de Bernoulli indépendantes et de paramètre  $p$ , alors  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $p$  est la probabilité de succès à chaque expérience (sera démontré plus tard).

**Exemple 17.** Soit une urne qui contient 10 blanches, 3 rouges et 12 noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, 7 boules. On note  $X$  la VA qui compte le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de  $X$  ?

### 4.3 Couple de variables aléatoires

Soient  $X$  (resp.  $Y$ ) une VA définis sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $E$  (resp.  $F$ ).


 **Définition de la loi conjointe**

Le couple  $(X, Y)$  est une variable à aléatoire sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $E \times F$ . La **loi conjointe** de  $X$  et  $Y$  est la loi du couple  $(X, Y) : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow [0; 1] \\ (x, y) \longmapsto \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \end{cases}$ .

**Remarque 7.** Si  $p = |E|$  et  $q = |F|$  sont petits, alors on consigne la loi conjointe dans un tableau à  $p$  lignes et  $q$  colonnes.

**Remarque 8.** On note  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ .

**Exemple 18.** On lance deux dés équilibrés et de façon indépendante et on note  $X$  le plus grand nombre obtenu et  $Y$  le plus petit, donner la loi conjointe de  $(X, Y)$ .

 **Attention à l'univers image**

Ce n'est pas parce que  $x$  est une issue de  $X$  et que  $y$  est une issue de  $Y$  que  $(x, y)$  est une issue de  $(X, Y) : (X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$  mais il n'y a pas forcément égalité.

 **Définition de la loi marginale**

On appelle **première loi marginale** de  $(X, Y)$  la loi de  $X$ , **seconde loi marginale** de  $(X, Y)$  la loi de  $Y$ .

 **Proposition n° 6 : calcul des lois marginales en fonction de la loi conjointe**

Soit  $(X, Y)$  un couple de VA, alors la loi marginale de  $X$  est donnée par (idem pour  $Y$ ) :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

**Exemple 19.** Calculer la loi marginale de  $X$  dans l'exemple précédent.

**Remarque 9.** Étant donnée la loi conjointe, on peut calculer les lois marginales, par contre, les lois marginales seules ne suffisent pas à retrouver la loi conjointe.

**Exemple 20.** Donner deux exemples de variables aléatoires  $(X, Y)$  tels que les lois marginales soient des lois uniformes sur  $\{0; 1\}$ .



### Définition loi conditionnelle de $X$ sachant un évènement $A$

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $E$  et  $A$  un évènement de  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(A) > 0$ . On appelle loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $A$  l'application  $x \mapsto \mathbb{P}(X = x|A) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$  définie sur  $E$  et à valeurs dans  $[0; 1]$ .

**Exemple 21.** En conservant l'exemple précédent, calculer la loi de  $X$  sachant l'évènement  $Y = 3$ .

## 4.4 Généralisation à un $n$ -uplet de variables aléatoires



### Définition de la loi d'un $n$ -uplet

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de VA, on appelle loi conjointe de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  la loi de  $X$  :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

Étant donnée la loi de  $X$ , on appelle  $i$ -ième loi marginale la loi de  $X_i$ .

**Remarque 10.** Si  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un  $n$ -uplet de VA, alors la  $i$ -ième marginale de  $X$  est :

$$\mathbb{P}(X_i = x_i) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

## 5 Indépendance

### 5.1 Indépendance de deux évènements



#### Définition de l'indépendance de deux évènements

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements, on dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

**Remarque 11.** Lorsque  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ . Ainsi, la probabilité d'obtenir  $A$  est la même si on sait que  $B$  est réalisé.



#### Proposition n° 7 : indépendance des évènements complémentaires

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi, de même pour  $\bar{A}$  et  $B$ , de même  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

### 5.2 Indépendance de $n$ évènements



#### Définition de l'indépendance de $n$ évènements

On dit que les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont indépendants si  $\forall J \subset \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$

**Exemple 22.** Si  $n = 2$  ou  $n = 3$  quelle(s) vérifications faut-il faire pour démontrer que les événements sont indépendants ?

**Remarque 12.** Si les événements  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  sont indépendants, alors toute sous-famille l'est aussi.



**Péril imminent l'indépendance de  $n$  événements n'est pas l'indépendance deux à deux**

Il est possible que  $A_1$  et  $A_2$  soient indépendants, de même entre  $A_2$  et  $A_3$  de même qu'entre  $A_1$  et  $A_3$  sans que  $A_1, A_2$  et  $A_3$  soient indépendants.

**Exemple 23.** Soit  $\Omega = \llbracket 0; 3 \rrbracket$  muni de sa probabilité uniforme, on note  $A_1 = \{0, 1\}$ ,  $A_2 = \{1, 2\}$  et  $A_3 = \{0, 2\}$ , montrer que  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendants, de même  $A_1$  et  $A_3$  puis  $A_2$  et  $A_3$  mais que  $A_1, A_2$  et  $A_3$  ne sont pas indépendants.



**Proposition n° 8 : indépendance des événements complémentaires**

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des événements indépendants et  $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ , alors  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sont indépendants.

### 5.3 Indépendance de deux variables aléatoires



**Définition de l'indépendance de 2 variables aléatoires**

On dit que deux VA, définies sur  $\Omega$ ,  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** (noté  $X \perp\!\!\!\perp Y$ ) si :

$$\forall A \subset X(\Omega) \quad \forall B \subset Y(\Omega) \quad \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$



**Proposition n° 9 : équivalence de l'indépendance**

$X \perp\!\!\!\perp Y$  ssi  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$



**Proposition n° 10 : indépendance de variables aléatoires images**

Si  $f: X(\Omega) \rightarrow E$  et  $g: Y(\Omega) \rightarrow E$ , et  $X \perp\!\!\!\perp Y$  alors

$$f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

**Exemple 24.** Ainsi, si  $X$  et  $Y$  sont des VA réelles indépendantes, alors  $X^2 \perp\!\!\!\perp Y \times \sin(Y^3)$ .

### 5.4 Indépendance de $n$ variables aléatoires



**Définition de l'indépendance de  $n$  variables aléatoires**

On dit que  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont **indépendantes** si :

$$\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega)) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

**Remarque 13.** L'indépendance de  $n$  variables aléatoires va servir à modéliser la répétition d'une expérience identique où les résultats précédents n'ont pas de conséquences sur les expériences à venir. Par exemple, si  $X_k$  représente la valeur du dé au bout de  $k$  lancers, alors il paraît raisonnable de supposer que la famille  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est formée de VA indépendantes.



**Proposition n° 11 : indépendance de  $n$  variables aléatoires.**

$X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$



**Remarque 14.** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et  $i \neq j$  alors  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes (indépendance deux à deux). Plus généralement si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors toute sous-famille est indépendante.



**Péril imminent la réciproque est fausse**

Si  $X, Y$  et  $Z$  sont telles que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X$  et  $Z$  aussi et  $Y$  et  $Z$  également, cela n'implique pas que  $X, Y$  et  $Z$  sont indépendantes. De même avec plus de trois variables aléatoires.

**Exemple 25.** Soit  $X$  tel que  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$ ,  $Y$  indépendante de  $X$  de même loi, on pose  $Z = XY$ , alors  $X \perp\!\!\!\perp Y$ ,  $X \perp\!\!\!\perp Z$  et  $Y \perp\!\!\!\perp Z$ . Mais,  $X, Y$  et  $Z$  ne sont pas indépendantes.



**Exemple fondamental : somme de  $n$  variables aléatoires de Bernoulli**

Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VA indépendantes, de même loi :  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $X = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ .



**Théorème n° 4 : lemme des coalitions**

(admis)

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $E$ , soit  $f: E^m \rightarrow F$  et  $g: E^{n-m} \rightarrow F$ , alors les variables aléatoires  $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

**Remarque 15.** On peut faire plus de deux coalitions : les variables aléatoires  $f(X_1, \dots, X_4)$ ,  $g(X_5, \dots, X_8)$ ,  $h(X_9, X_{10}), \dots, m(X_{20}, \dots, X_{25})$  sont indépendantes.

**Exemple 26.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_7$  sont indépendantes, alors  $X_1 X_2, \exp(X_3) + X_4 \sin(X_5), X_6, X_7^8$  sont indépendantes.

## 6 Espérance et Variance

On cherche à calculer des indicateurs permettant de décrire  $X$  une variable aléatoire réelle. On se ne travaillera donc dans cette partie qu'avec des variables aléatoires réelles.

### 6.1 Espérance



**Définition de l'espérance**

Pour  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ , on appelle **espérance** de  $X$  :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^p x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

On dit que  $X$  est **centrée** si  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

**Remarque 16.**  $\mathbb{E}(X)$  est une moyenne pondérée (par les probabilités) des valeurs prises par  $X$ .



**Exemples : espérances usuelles à connaître**

1. Si  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  alors  $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ .

3. Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  alors  $\mathbb{E}(X) = np$ .

2. Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  alors  $\mathbb{E}(X) = p$ .

4. Si  $A$  est un évènement de  $\Omega$ , alors  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ .



**Proposition n° 12 : écriture théorique de  $\mathbb{E}(X)$**

Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m X(\omega_i) \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$



### Proposition n° 13 : propriétés de l'espérance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors :

- Linéarité de l'espérance :  $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Espérance d'une variable aléatoire constante :  $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$
- Positivité de l'espérance : si  $X \geq 0$  (pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) \geq 0$ ), alors  $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance de l'espérance : si  $X \leq Y$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) \leq Y(\omega)$ ) alors,  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Inégalité triangulaire :  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

**Exemple 27.** Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors

$$\mathbb{E}(X) = np$$



### Théorème n° 5 formule de transfert

Soient  $X$  une VA à valeurs dans  $E$  et  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y = f(X)$  alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

**Remarque 17.** Ce théorème permet de calculer  $\mathbb{E}(Y)$  sans connaître la loi de  $Y$  mais à partir de la loi de  $X$ . On remarque que ce théorème s'applique si  $X$  est un couple ou un  $n$ -uplet de variables aléatoires.

**Exemple 28.** 1. Si  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  calculer  $\mathbb{E}(X^2)$ . 3. Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , calculer  $\mathbb{E}(X^2)$ .  
2. Si  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  calculer  $\mathbb{E}(3^X)$ .



### Proposition n° 14 : inégalité de Markov

Soient  $a > 0$  et  $X$  une variable aléatoire **positive**. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

**Exemple 29.** Si dans une classe, la moyenne au DS est 6, alors que peut-on dire de la probabilité d'avoir une note supérieure ou égale à 18 ?



### Proposition n° 15 : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soient  $X$  et  $Y$  deux VA indépendantes alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes alors

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$



### Péril imminent : la réciproque est fautive

⚡ Si  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ , ça ne prouve pas forcément que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exemple 30.**  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -1; 1 \rrbracket)$  et  $Y = 1 - X^2$

## 6.2 Variance



### Définition de la variance et de l'écart-type

Soit  $X$  une variable aléatoire, on appelle **variance** de  $X$  le réel positif  
On appelle **écart-type** de  $X$  le réel positif

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathbb{V}(X)} \end{aligned}$$

**Remarque 18.** La variance mesure la moyenne des carrés des écarts de  $X$  par rapport à  $\mathbb{E}(X)$ .

Par la formule de transfert,  $\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$ .



**Proposition n° 16 : propriétés de la variance**

Soit  $X$  une variable aléatoire alors :

1.  $\mathbb{V}(X) \geq 0$
2.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$  (la variance est quadratique)
3.  $\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$  ( $X$  est presque sûrement constante)
4.  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$  (formule de König-Huygens)
5. Si  $\mathbb{V}(X) > 0$ , alors  $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  est une variable centrée réduite ( $\mathbb{E}(Y) = 0$  et  $\mathbb{V}(Y) = 1$ )



**Exemples de variances des lois usuelles à connaître :**

1. Si  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  alors  $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$
2. Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$  alors  $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$
3. Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  alors  $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$



**Définition de la covariance de deux variables aléatoires**

Soit  $X$  et  $Y$  deux VA réelles, on définit la **covariance** de  $X$  et  $Y$  par  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$   
 On dit que  $X$  et  $Y$  sont **non corrélées** si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .



**Proposition n° 17 : formule de la covariance**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux VA réelles, alors

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

**Remarque 19.** Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $X$  et  $Y$  sont non corrélées.

**Remarque 20.**  $\mathbb{V}(X) = \text{cov}(X, X)$



**Attention la réciproque est fautive**

Il est possible d'être non corrélées sans être indépendantes.

**Exemple 31.** Si  $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ , alors  $\text{cov}(X, X^2) = 0$  alors que  $X$  et  $X^2$  ne sont pas indépendantes.



**Proposition n° 18 : variance de la somme de variables aléatoires**

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux VA alors  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$
2. Si  $X$  et  $Y$  sont non corrélées (ou indépendantes), alors  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
3. Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  variables aléatoires,  $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$
4. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont deux à deux non corrélées (ou deux à deux indépendantes), alors  $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$



**Proposition n° 19 : variance d'une binomiale**

Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors

$$\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$



### Théorème n° 6 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $\varepsilon > 0$ , alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

**Exemple 32.** Supposons qu'on ait dé dont la probabilité d'obtention un six est notée  $p$ . Pour approximer  $p$ , on lance ce dé  $n$  fois et on note  $F$  la fréquence du six. Pour quelle valeur de  $n$  la probabilité pour que  $F$  soit une approximation de  $p$  à 0.01 près est-elle supérieure à 0.9?

**Remarque 21.** Sur cet exemple, on a montré que la probabilité d'un évènement est la limite de la fréquence de cet évènement lorsque l'on répète un évènement un «grand» nombre de fois. Cela est conforme à l'intuition, dire qu'un dé est équilibré indique que si on le lance un très grand nombre de fois la fréquence d'une face doit tendre vers  $1/6$ . Cela permet de relier la probabilité à cette notion intuitive ce que l'on avait soigneusement évité jusqu'à présent.

## 7 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Les caractéristiques de ce tableau doivent être absolument connu par cœur pour les quatre premières variables aléatoires. Les deux dernières seront vu en PC/PSI. Ainsi l'année prochaine, vous pourrez réviser toutes les lois usuelles sur ce tableau.

Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Loi de probabilité	Espérance	Variance	Interprétation
Quasi-certaine	$a \in \mathbb{R}$		$\mathbb{P}(X = a) = 1$	$a$	0	
Bernoulli	$p \in [0; 1]$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	$p$	$p(1 - p)$	succès vs échec
Binomiale	$(p, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N}^*$	$\llbracket 0; n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$	$np$	$np(1 - p)$	nombre de succès dans $n$ Va de Bernoulli de paramètre $p$ indépendantes
Uniforme	$n$	$\llbracket 1; n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	tirage équitale
Géométrie	$p \in ]0; 1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Donne le premier succès dans une suite de Va indépendantes de Bernoulli de paramètre $p$
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour $k \in \mathbb{N}$	$\lambda$	$\lambda$	Désintégration radioactive, arrivé dans une file d'attente, événements rares etc.