Dénombrement

Exercice 1 ($\star$ Mod)**.** On souhaite ranger 3 livres de mathématiques, 5 livres de physique et 2 de chimie sur une étagère.

1. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement ?
2. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement en groupant les livres par matières ?

Exercice 2 ($\star$ Cal)**.**
1. Combien y a-t-il de matrices de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont dans $\{0,1,2\}$?
2. Combien y a-t-il de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ dont les coefficients sont dans $\{0,1,2\}$?
3. Dans $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$, combien y a-t-il de produits ?

Exercice 3 ($\star$ Cal)**.** On joue un jeu de Poker à 52 cartes où une main consiste à tirer cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains ?
2. Combien y a-t-il de mains avec un carré (4 cartes de même valeur) ?
3. Combien y a-t-il de mains avec un brelan (exactement 3 cartes de même valeur et pas de paire) ?
4. Combien y a-t-il de quintes (5 cartes de valeurs successives) ?

Exercice 4 ($\star$ Mod ©)**.** Soit $P_1P_2\dots P_n$ un polygone à n sommets. On appelle diagonale tout segment dont les extrémités sont des sommets du polygone qui n'est pas un côté du polygone. Combien y a-t-il de diagonales ?

Exercice 5 ($\star$ Mod)**.** Une classe de PCSI avec 42 élèves rentrent dans une salle de 50 places. Combien cela fait-il de plans de classes possibles ?

Exercice 6 ($\star\star$ Mod ©)**.** Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n\leqslant p$ combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1 \,;n]\!]$ dans $[\![1 \,;p]\!]$?

Exercice 7 ($\star\star$ Cal)**.** Combien peut-on faire d'anagrammes avec le mot `maths` et avec le mot `anagrammes` ?

Exercice 8 ($\star$ Cal, Mod)**.** Dans une urne, se trouvent p boules rouges et q boules bleues.

1. Combien y a-t-il de façons de tirer simultanément n boules parmi ces $p+q$ boules avec $n\leqslant p$ et $n\leqslant q$?
2. Soit $k\in[\![0 \,;n]\!]$, combien y a-t-il de façons de tirer simultanément n boules avec k boules[1] rouges ?
3. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$.
4. Qu'obtient-on dans le cas où $p=q=n$?

Exercice 9 ($\star\star$ Rai)**.** Soit E un ensemble à n éléments et $A\in\mathscr{P}(E)$ tel que $|A|=p$

1. Que vaut le cardinal de $\mathscr{P}(E)$?
2. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $X\subset A$?
3. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $A\subset X$?
4. Combien y a-t-il de $X\in\mathscr{P}(E)$ tel que $A\cap X=\varnothing$?
5. Combien y a-t-il de couples $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2$ tel que $X\subset Y$?

Exercice 10 ($\star$ Rai)**.** Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ et F un ensemble de cardinal n

1. Combien y a-t-il d'applications de E vers F ?
2. Combien y a-t-il d'applications bijectives de E vers F ?
3. Combien y a-t-il d'applications injectives de E vers F ?
4. $\star\star$ Combien y a-t-il d'applications surjectives de E vers F ?

Exercice 11 ($\star$ Rai ©)**.** On part du point $(0,0)$ pour rejoindre le point $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 12 ($\star\star$ Rai ©)**.** On veut répartir n billes numérotées entre 1 et n dans 3 tiroirs.

1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités pour avoir exactement un tiroir vide ?

Exercice 13 ($\star\star$ Rai ©)**.** On veut répartir n billes indiscernables dans 3 tiroirs.

1. Combien y a-t-il de possibilités ?
2. Combien y a-t-il de possibilités pour avoir exactement un tiroir vide ?

Exercice 14 ($\star$ Rai)**.** Les notes de 40 élèves de PCSI, lors d'un DS de mathématiques, étaient deux à deux distinctes[2].

1. Pas la ville.
2. C'est assez réaliste si on indique suffisamment de chiffres après la virgule.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Charles (un élève de PCSI) est premier ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles avec Charles ?
4. En supposant une répartition uniforme, quelle est la probabilité que Charles finisse sur le podium ?

Exercice 15 ($\star$ Rai)**.** Chacun des 42 élèves de PCSI serrent la main à chacun des 40 élèves de PC après que ceux-ci aient brillamment passé les concours. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Exercice 16 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit E un ensemble de cardinal n, calculer $\sum\limits_{X\in\mathscr{P}(E)} |X|$.

Exercice 17 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal 13.

1. Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
2. Montrer qu'il existe $(a,b)\in E^2$ tel que $0<\arctan(a)-\arctan(b)\leqslant \dfrac{\pi}{12}$
3. En conclure que $0<\dfrac{a-b}{1+ab}\leqslant 2-\sqrt{3}$.

Exercice 18 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.**
1. Si $\varphi\colon P\mapsto P(X+1)$, vérifier que $\varphi\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Donner les matrices de φ et de φ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, notée, respectivement, $M=(M_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$ et $N=(N_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}$ où, exceptionnellement, les indices de lignes et de colonnes débutent à 0.
3. Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, on pose, pour $j\in[\![0\,;n]\!]$, $b_j=\sum\limits_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a_k$, démontrer que $a_j=\sum\limits_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}b_k$ (formule d'inversion de Pascal).

Soit $(n,j,p)\in\mathbb{N}^3$ tels que $p\geqslant n\geqslant j$, on note $a_{p,j}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;p]\!]$ vers $[\![1\,;j]\!]$. $a_{p,j}$ compte aussi le nombre de surjections de E vers F si E est de cardinal p et F de cardinal j.

4. Combien y a-t-il de fonctions de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;j]\!]$?
5. Soit $k\in[\![0\,;j]\!]$. Combien y a-t-il de fonctions de $[\![1\,;p]\!]$ dans $[\![1\,;j]\!]$ dont l'image est de cardinal k ?
6. En déduire que $j^p=\sum\limits_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a_{p,k}$
7. En déduire la valeur de $a_{p,n}$ à l'aide d'une somme.

Exercice 19 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $n\in\mathbb{N}$, et $(A_0,A_1,\dots,A_n)$ un n-uplet de matrices. On note $C(n)$ le nombre de parenthésages possible que l'on peut effectuer pour calculer le produit $A_0A_1\dots A_n$. Par exemple :
- Si $n=0$, il a A_0, ainsi $C(0)=1$
- Si $n=1$, il a A_0A_1, ainsi $C(1)=1$
- Si $n=2$, il a $(A_0A_1)A_2$ ou $A_0(A_1A_2)$, ainsi $C(2)=2$
- Si $n=3$, $C(3)=5$

En prenant en compte la dernière parenthèse, trouver une expression de $C(n)$ en fonction [3] de $C(0)$, $C(1)$,…, $C(n-1)$.

Exercice 20 (𝄞$\star\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E un ensemble fini et $A\subset E$.

1. En terme de cardinal, que vaut $\sum\limits_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)$?
2. Montrer que $\mathbb{1}_{E\setminus A}=1-\mathbb{1}_A$.
3. Soit $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ une famille de parties de E. Justifier que
$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_i}=\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}$$
4. On pose $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. En utilisant le complémentaire de A et les questions précédentes, écrire le cardinal de A à l'aide d'une somme de cardinaux d'intersections des A_i.

Exercice 21 ($\star\star\star$ Rec)**.** Une soirée a lieu avec exactement n couples. Lorsqu'ils s'aperçoivent, les gens se serrent la main avec les règles suivantes :
1. On ne serre jamais la main à soi-même.
2. On ne serre jamais la main à son conjoint/sa conjointe.
3. On ne sert jamais deux fois la main à la même personne.

À la fin de la soirée, l'un des participants, prend la parole sur une estrade, demande à toutes les autres personnes, combien de mains ces personnes ont serrées. Il obtient des réponses qui sont toutes différentes. Combien de mains cette personne a-t-elle serrées ?

3. Le cours de deuxième année vous permettra, à partir de cette expression, de trouver une expression explicite de $C(n)$.