Chapitre 21
Séries numériques

Prérequis :
- Sommes
- Suites
- Développements limités
- Intégration (en particulier la formule de Taylor avec reste intégrale)

Objectifs :
- Donner un sens à une «somme infinie» lorsque c'est possible.
- Déterminer si c'est possible.
- Le cas échéant, calculer cette somme si c'est possible.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1 Généralités sur les séries

Définition d'une série

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le terme S_n est la **somme partielle** d'indice n de cette série. On note $\sum u_n = (S_n)_n$ la série de terme général u_n.

Remarque 1. $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$ etc.

Définition de la convergence ou de la divergence d'une série et somme

On dit $\sum u_n$ **converge** (respectivement diverge) lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (respectivement diverge).
Si la série $\sum u_n$ converge, on appelle **somme (infinie)** de la série $\sum u_n$ la limite de $(S_n)_n$, notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition du reste d'une série convergente

Si $\sum u_n$ converge, soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, R_n est appelé le **reste** d'ordre n de la série.

Exemple des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la série géométrique $\sum q^n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ si $q \neq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q = 1$, $S_n = n+1$
- si $|q| < 1$, alors $\sum q^n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$
- si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge.

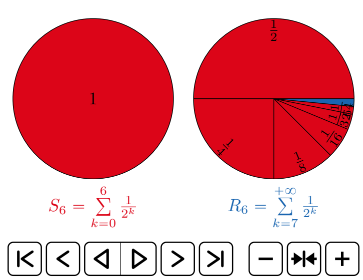


Figure 1 – Les séries géométriques (avec $q = 1/2$) : piece of cake

Péril imminent : la série géométrique de raison 1

On s'assure que $q \neq 1$ **avant** d'écrire $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\dfrac{1}{1-q}$, sous peine d'avoir des problèmes judiciaires.

Attention à ne pas confondre série, somme partielle et somme

La suite $(u_n)_n$ et le nombre u_n ne doivent pas être confondus. De même, la série $\sum u_n$, le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et le réel $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ (qui n'existe qu'après avoir montré que la série converge) ne doivent pas être confondus.

Remarque 2. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite définie à partir de n_0, on définit de même $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$, par $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n \geqslant n_0}$, et en cas de convergence, on note $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 1. Si $q \in \mathbb{C}$, alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$.

Remarque 3. Soit $\sum u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n + R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $R_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Exemple : la série harmonique

Posons $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} 1/n$ diverge, alors que $1/n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Proposition n° 1 : condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Par contraposée, si $u_n \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge, on dit que $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple 2. Si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum q^n$ diverge grossièrement tout comme $\sum n$, $\sum \dfrac{n + \cos(n)}{n}$.

Péril imminent la réciproque est fausse

Si $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, cela ne prouve pas que $\sum u_n$ converge (cf. $\sum 1/n$).

Proposition n° 2 : espace vectoriel des séries convergentes et linéarité de la somme

Soient des séries convergentes $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum \lambda u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

La somme est une forme linéaire de l'espace vectoriel des séries convergentes.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors la série $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Remarque 4. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire de $\sum u_n + v_n$.

Proposition n° 3 : convergence de la série télescopique

La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple 3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1.

Exemple : l'exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$.

2 Séries à termes positifs

Remarque 5. Les résultats de cette partie si $(u_n)_n$ est à termes positifs seulement à partir d'un certain rang.

2.1 Critère de convergence des séries positives

Proposition n° 4 : convergence des séries à termes positives et majorées

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

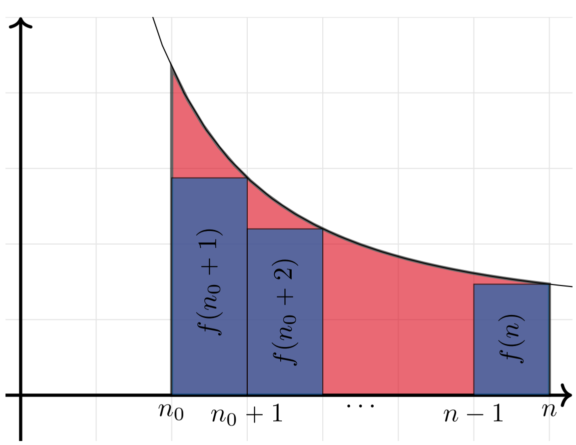
1. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2. Si $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.
3. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On note alors, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.

2.2 Comparaison série-intégrale

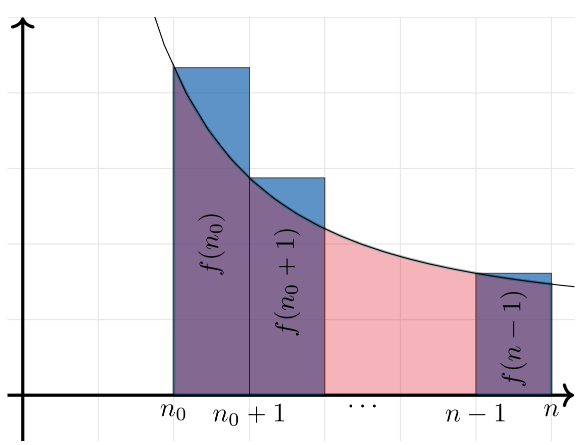
Proposition n° 5 : comparaison série-intégrale

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f\colon [n_0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction **continue**, **décroissante** et **positive**. Alors :

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant n_0}$ converge.



(a) $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$



(b) $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} f(k)$

Figure 2 – Comparaison série-intégrale : la somme partielle est interprétée comme la somme des aires de rectangles de largeur 1 et de longueur $f(k)$, ainsi, on peut la comparer à l'intégrale de la fonction f.

Définition des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle série de Riemann de paramètre α, la série $\sum 1/n^{\alpha}$.

Proposition n° 6 : comparaison série-intégrale appliquée à l'étude des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum 1/n^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 4. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (dur à montrer).

Déterminer des équivalents de somme partielle ou de reste avec des comparaison série-intégrale

1. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
2. Si $\alpha \in]0;1[$, trouver un équivalent de la somme partielle d'ordre n : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$.
3. Si $\alpha > 1$, trouver un équivalent du reste d'ordre n : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

2.3 Comparaison de séries à termes positifs

Proposition n° 7 : comparaison de deux séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Exemple 5. Étude de la nature des séries $\sum e^{\cos(n^3)}/n^{\frac{1}{3}}$ et $\sum \ln(n)/n$.

Proposition n° 8 : séries dont les termes sont équivalents

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à **termes strictement positifs** telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Attention les sommes ne sont pas équivalentes

Si $u_n \sim v_n$, en général $\sum_{k=0}^{n} u_k \not\sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ (en effet, les sommations d'équivalents sont interdites).

Exemple 6. Étude de la nature de la série $\sum \frac{1}{n + \ln(n)}$.

3 Séries absolument convergentes

3.1 Définitions

Définition

On dit que $\sum u_n$, une série à termes réels ou complexes, **converge absolument** (ou que la suite $(u_n)_n$ **est sommable**) si la série $\sum |u_n|$ converge. On note dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Exemple 7. La série $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n^3}$ est absolument convergente.

Remarque 6.
- Pour étudier la convergence absolue, on utilise les outils vus précédemment pour $\sum |u_n|$.
- Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge absolument.

Théorème n° 1 : la convergence absolue entraîne la convergence

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge, de plus : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Remarque 7. La réciproque est fausse pour une série de signe quelconque.

Exemple 8. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$, alors $\sum u_n$ converge, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

3.2 Comparaison de séries

Théorème n° 2 : $\mathcal{O}$, o, $\sim$ d'une série SATP convergente

Soit $\sum v_n$ une série **à termes strictement positifs convergente** (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$).
Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou bien $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Exemple 9.
1. Étude de la nature de $\sum 1 - \cos(1/n)$
2. Étude de la nature de $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma \in \left]0\,;1\right[$ (constante d'Euler). $\gamma \in \mathbb{Q}$? Répondre à cette question et c'est la gloire !

Remarque 8.
- Souvent, on fera des développements limités/asymptotique, il faut pousser l'ordre de façon à avoir un terme dans le o ou le $\mathcal{O}$ qui donne une série convergente.
- Faire des DL avec des $\mathcal{O}$ permet souvent de conclure sur la convergence des séries et peut permettre de calculer un ordre en moins dans les DL, dans la pratique, on fera souvent en sorte d'obtenir un $\mathcal{O}(1/n^2)$.

Péril imminent il faut que $\sum v_n$ soit une SATP pour appliquer le théorème.

Si $\sum v_n$ n'est pas une SATP, il est possible que $\sum v_n$ converge et que $\sum u_n$ diverge avec $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exemple 10. On peut montrer que $\frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}\right)$ avec $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Attention à ne pas oublier la condition convergente

Si $\sum v_n$ diverge et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, on ne peut rien dire de $\sum u_n$.
En particulier, si $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

4 Cartes mentales