DS1

24 septembre 2022

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Le cours

1. Recopiez et complétez la phrase suivante sur votre copie. «La fonction arccos est définie sur , elle est dérivable sur , et pour tout $x \in$, $\arccos'(x) =$ ».
2. Complétez :

$$\arccos(-1) = \qquad \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \qquad \arccos(0) = \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \qquad \arccos(1) = \qquad \arccos(\cos(3\pi)) = \qquad \cos(\arccos(0.8)) =$$

3. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, nier la proposition suivante avec des quantificateurs :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow (\ell - \varepsilon \leqslant u_n \quad \text{et} \quad u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

4. Complétez la définition de la dérivabilité : Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si

   Dans ce cas, on définit la dérivée de f en a par $f'(a) =$
5. Complétez la définition de la bijection avec des quantificateurs : soit $f\colon I \to J$, on dit que f est une bijection si

   Dans ce cas, on pose $f^{-1}(\quad) =$, ainsi $f^{-1}\colon \quad \to \quad$.
6. Complétez le théorème de la dérivation d'une bijection : soit $f\colon I \to J$, $a \in I$ et $b = f(a) \in J$ si

   alors est dérivable en et =

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \quad (E_1)$$

Soit f une fonction solution, c'est à dire une fonction qui vérifie (E_1).

1. Déterminer $f(0)$, $f(1)$ et $f(\frac{1}{2})$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$$
   On note cette égalité (E_2).
3. À l'aide (E_1) et (E_2), trouver une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure l'exercice.

Exercice 2 : des suites

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, on pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + k^2}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de k.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer et démontrer l'expression de u_n en fonction de n et k.

Soit $(v_n)_n$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$ et $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n - 2^n$.

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $w_1 = 5$ et pour tout $n \geqslant 1$, $w_{n+1} = \dfrac{2}{n}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$.

4. Calculer w_2, w_3.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer et démontrer l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 3 : des fonctions usuelles

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \qquad \text{et} \qquad g\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1. Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, énoncer la relation entre $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ et démontrer-là.
4. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer f' et g'.
6. En déduire la dérivée de h où $h = f - g$.
7. En déduire le résultat voulu.

On va maintenant montrer que $f = g$ d'une seconde manière qui utilise la fonction tan.

8. Rappeler le domaine de définition de tan, que l'on notera D dans la suite.
9. Montrer que pour x dans $\mathbb{R}$, $2f(x) \in D$ et calculer $\tan(2f(x))$.
10. Montrer que $k\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$.
11. Déterminer l'expression de la tangente de k en 0.
12. Trouver l'expression explicite de k^{-1} (la bijection réciproque de k).
13. Tracer les courbes représentative de k et k^{-1} ainsi que leurs éventuelles asymptotes.
    On utilisera un repère orthonormée et une couleur pour chaque fonction.
14. Rappeler les formules trigonométriques de duplication concernant $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
15. En déduire que
$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
16. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $2g(x) \in D$ puis que $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
17. En déduire le résultat voulu.

On va maintenant appliquer ce résultat pour un calcul de tangente :

18. Simplifier $\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\ln(3))$ et $\mathrm{sh}(\frac{1}{2}\ln(3))$.
19. En appliquant l'égalité $f = g$ pour la valeur $\frac{1}{2}\ln(3)$, la tangente de quel angle peut-on calculer ?
    On simplifiera le résultat.

Exercice 4 : décomposition

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme une somme de puissances de 2 toutes distinctes.