

Le cours

- «La fonction arccos est définie sur $[-1; 1]$, elle est dérivable sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ».

- Complétez :

$$\begin{aligned} \arccos(-1) &= \pi & \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{3\pi}{4} & \arccos(0) &= \frac{\pi}{2} & \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} & \arccos(1) &= 0 & \arccos(\cos(3\pi)) &= \arccos(-1) = \pi & \cos(\arccos(0.8)) &= 0.8 \end{aligned}$$

-

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \quad \text{et} \quad (\ell - \varepsilon > u_n \quad \text{ou} \quad u_n > \ell + \varepsilon)$$

- Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a$. Dans ce cas, on définit la dérivée de f en a par $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- Soit $f: I \rightarrow J$, on dit que f est une bijection si

$$\forall y \in J \quad \exists ! x \in I \quad y = f(x)$$

Dans ce cas, on pose $f^{-1}(y) = x$, ainsi $f^{-1}: J \rightarrow I$.

- Soit $f: I \rightarrow J$, $a \in I$ et $b = f(a) \in J$, si f est une bijection (de I vers J) et que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (E_1)$$

Soit f une fonction solution, c'est à dire une fonction qui vérifie (E_1) .

- En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) + 0f(1-0) = 1+0$, soit $f(0) = 1$.
 - En remplaçant x par 1, on trouve $f(1) + 1f(1-1) = 1+1$. En outre, comme $f(0) = 1$, on trouve $f(1) = 2-1 = 1$.
 - En remplaçant x par $1/2$, on trouve $f(1/2) + f(1/2)/2 = 1+1/2$, soit $3f(1/2)/2 = 3/2$. Ainsi, $f(1/2) = 1$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = 1-x \in \mathbb{R}$, alors l'égalité (E_1) est encore vraie en remplaçant x par y , ainsi :

$$\begin{aligned} f(y) + yf(1-y) &= 1+y \\ f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) &= 1+(1-x) \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, en multipliant l'équation (E_2) par x , on obtient

$$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = 2x - x^2$$

En retirant (E_1) à cette équation, on trouve $(x(1-x)-1)f(x) = 2x - x^2 - 1 - x$. Soit

$$(-x^2 + x - 1)f(x) = -x^2 + x - 1$$

Or le discriminant du polynôme $-X^2 + X - 1$ vaut -3 , ainsi, ce polynôme n'a pas de racines réelles. En particulier, $-x^2 + x - 1 \neq 0$, en divisant par cette quantité, on obtient $f(x) = 1$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

4. Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** : si f est solution de (E_1) , alors les questions précédentes montrent que $f: x \mapsto 1$.
- **Synthèse** : posons $f: x \mapsto 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x \times 1 = 1 + x$$

Ainsi, f est solution de (E_1)

Ainsi, $x \mapsto 1$ est l'unique solution de l'équation (E_1) .

Exercice 2 : des suites

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, on pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^2}$.

- En remplaçant n par 0, on obtient $u_1 = \sqrt{u_0^2 + k^2} = |k|$.
• En remplaçant n par 1, on obtient $u_2 = \sqrt{u_1^2 + k^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}|k|$
• En remplaçant n par 2, on obtient $u_3 = \sqrt{u_2^2 + k^2} = \sqrt{2k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2} = \sqrt{3}|k|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on émet la conjecture suivante : $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \sqrt{n}|k|$ ». Comme $\sqrt{0}|k| = 0 = u_0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + k^2} = \sqrt{n k^2 + k^2} = \sqrt{(n+1)k^2} = \sqrt{n+1}|k|$$

Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence (simple), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}|k|$.

Soit $(v_n)_n$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$ et $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 3^n - 2^n$ ». Alors, pour $n = 0$, $3^0 - 2^0 = 0 = v_0$ et pour $n = 1$, $3^1 - 2^1 = 1 = v_1$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. Alors :

$$v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 3^n(15 - 6) - 2^n(10 - 6) = 3^{n+2} - 2^{n+2}$$

Dès lors, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par récurrence double, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n - 2^n$.

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $w_1 = 5$ et pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = \frac{2}{n}(w_1 + w_2 + \dots + w_n)$.

- En remplaçant n par 1, on trouve $w_2 = 2w_1 = 10$. Ensuite, en remplaçant n par 2, on trouve $w_3 = (w_1 + w_2) = 15$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on émet la conjecture suivante : $\mathcal{P}(n)$: « $w_n = 5n$ ». Pour $n = 1$, $5 \times 1 = 5 = w_1$, ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$ vraies. Alors :

$$w_{n+1} = \frac{2}{n}(5 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + \dots + 5 \times n) = \frac{10}{n}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{10}{n} \frac{n(n+1)}{2} = 5(n+1)$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence forte, on a ainsi montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) = 5n$.

Exercice 3 : des fonctions usuelles

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right)$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 0$ (comme demi-somme de deux exponentielles), ainsi, $1 + \operatorname{ch}(x) \geq 1 > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch}(x) \neq 0$. Ainsi, $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par composée, g est définie sur $\mathbb{R}$.
- $f(0) = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(0)) = \frac{1}{2} \arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(0)}{1 + \operatorname{ch}(0)}\right) = \arctan(0) = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par identité remarquable :

$$\begin{aligned}\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = e^x \times e^{-x} = 1\end{aligned}$$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont, g comme composée et quotient (le dénominateur ne s'annulant pas d'après ce qu'on a montré lors de la question 1) de fonctions qui le sont.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la dérivée d'une composée et que $1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{sh}'(x) \frac{1}{1 + \text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{2\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\text{ch}(x)}$$

et

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{\text{ch}(x)(1 + \text{ch}(x)) - \text{sh}^2(x)}{(1 + \text{ch}(x))^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)} \right)^2} \\ &= \frac{\text{ch}(x)(1 + \text{ch}(x)) - \text{sh}^2(x)}{(1 + \text{ch}(x))^2} \times \frac{(1 + \text{ch}(x))^2}{(1 + \text{ch}(x))^2 + \text{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\text{ch}(x) + \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{1 + 2\text{ch}(x) + \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\text{ch}(x) + 1}{2\text{ch}(x) + 2\text{ch}^2(x)} \\ &= \frac{\text{ch}(x) + 1}{2\text{ch}(x)(1 + \text{ch}(x))} \\ &= \frac{1}{2\text{ch}(x)}\end{aligned}$$

6. La fonction $h = f - g$ est dérivable comme différence de fonctions dérivables, de plus, $h' = f' - g' = 0$ d'après la question précédente.
7. La fonction h est ainsi constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$, d'après la question 2. Ainsi, la fonction h est la fonction nulle. Il en découle que $f = g$.
8. La fonction $\tan$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
9. Pour x dans $\mathbb{R}$, on a $2f(x) = \arctan(\text{sh}(x)) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\subset D$ et donc $\tan(2f(x))$ est bien défini. De plus :

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\text{sh}(x))) = \text{sh}(x)$$

10. La fonction k est dérivable comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas), et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k'(x) = \frac{\text{ch}(x)(1 + \text{ch}(x)) - \text{sh}^2(x)}{(1 + \text{ch}(x))^2} = \frac{\text{ch}(x) + \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{(1 + \text{ch}(x))^2} = \frac{1 + \text{ch}(x)}{(1 + \text{ch}(x))^2} = \frac{1}{1 + \text{ch}(x)} > 0$$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad k(x) = \frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)} = \frac{2\text{sh}(x)}{2 + 2\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(2e^{-x} + 1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x} + 1 + e^{-2x}}$$

Ainsi $k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par imparité de k on a aussi $k(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$. Ainsi, $k(\mathbb{R}) =]-1; 1[$. D'après le théorème de la bijection strictement monotone, k est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$.

11. Comme $k(0) = 0$ et $k'(0) = 1/2$, l'équation de la tangente de k en 0 est $x \mapsto 0 + x/2$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = k(x) \in]-1; 1[$, alors :

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} \\ y(2 + e^x + e^{-x}) &= e^x - e^{-x} \\ 2y + e^x(y - 1) + e^{-x}(y + 1) &= 0 \\ (e^x)^2(y - 1) + 2ye^x + (y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, e^x est une solution d'une équation du second degré dont le discriminant est

$$(2y)^2 - 4(y - 1)(y + 1) = 4 > 0$$

dont les solutions sont :

$$\frac{-2y + 2}{2(y - 1)} \quad \text{et} \quad \frac{-2y - 2}{2(y - 1)}$$

On en déduit que :

$$e^x \in \left\{ -1; \frac{y + 1}{1 - y} \right\}$$

Remarquons que $e^x > 0$ contrairement à -1 , donc nécessairement $e^x = \frac{y + 1}{1 - y}$. Ces deux quantités étant strictement positives ($-1 < y < 1$), en appliquant le logarithme, il vient $x = \ln \left(\frac{y + 1}{1 - y} \right)$. Ainsi,

$$\text{on a montré que } k^{-1} \begin{cases}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \left(\frac{x + 1}{1 - x} \right) \end{cases}.$$

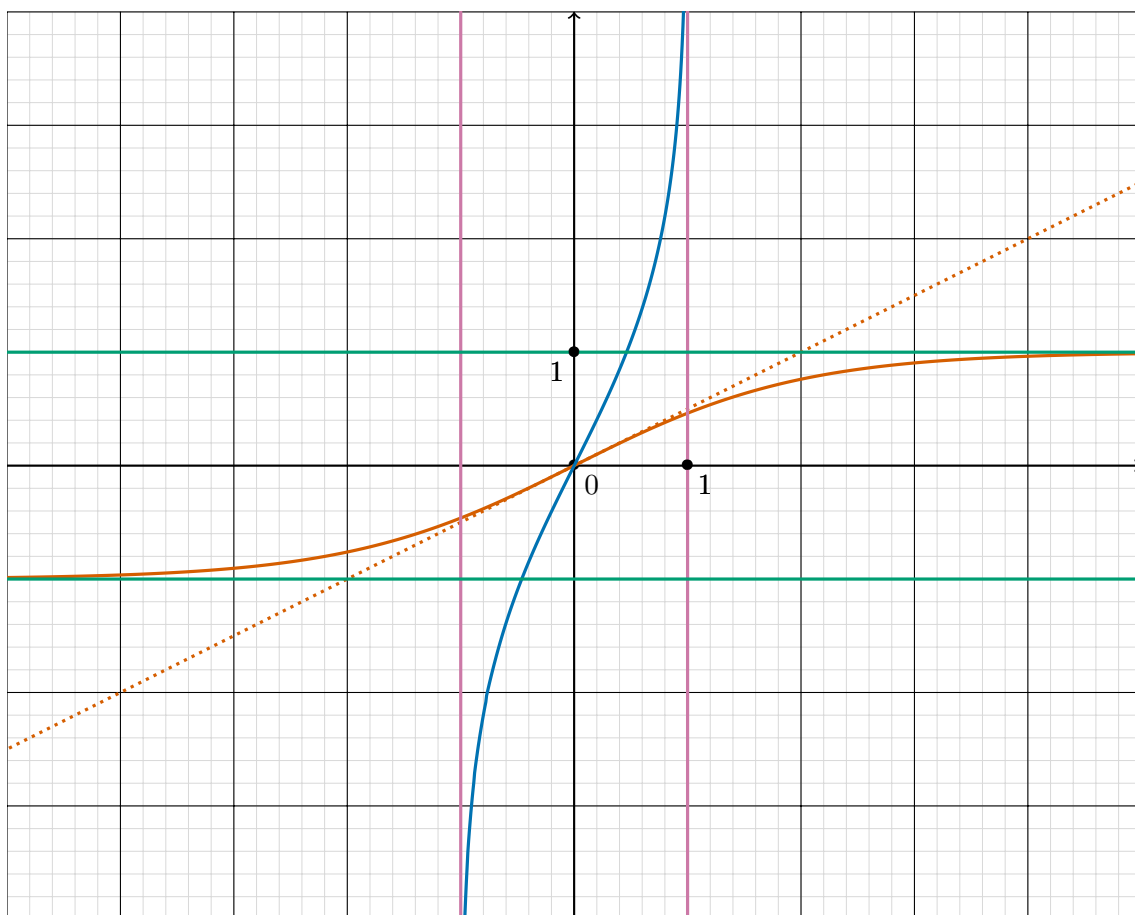


FIGURE 1 – En rouge la courbe de k , en bleu la courbe de k^{-1} , en pointillé la tangente de k en 0, en vert les asymptotes de k et en violet les asymptotes de k^{-1} .

13.

14. On a $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

15. Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$, alors $\tan(\theta) \neq \pm 1$ et donc le dénominateur ne s'annule pas et

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta)$$

16. D'après la question 10, pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 < k(x) < 1$ et $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ceci implique que $-\frac{\pi}{4} < \arctan(k(x)) < \frac{\pi}{4}$ puis $2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $2g(x) \in D$ et $\tan(2g(x))$ est bien défini. De plus on calcule :

$$\begin{aligned} \tan(2g(x)) &= \frac{2 \tan(g(x))}{1 - \tan^2(g(x))} = \frac{2 \tan(\arctan(k(x)))}{1 - \tan^2(\arctan(k(x)))} = \frac{2k(x)}{1 - k^2(x)} \\ &= \frac{2\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} \\ &= \frac{2\operatorname{sh}(x)}{1 - \left(\frac{2\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right)^2} \\ &= \frac{2\operatorname{sh}(x)(1 + \operatorname{ch}(x))}{(1 + \operatorname{ch}(x))^2 - \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{2\operatorname{sh}(x)(1 + \operatorname{ch}(x))}{1 + 2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}^2(x)} \\ &= \frac{2\operatorname{sh}(x)(1 + \operatorname{ch}(x))}{2 + 2\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{sh}(x) \end{aligned}$$

17. Les questions précédentes montrent que pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, ainsi $\arctan(\tan(2f(x))) = \arctan(\tan(2g(x)))$, comme $2f(x)$ et $2g(x)$ sont dans $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$ et qu' $\arctan$ est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$, on obtient $2f(x) = 2g(x)$.

18. On a :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2} + 3^{-1/2}}{2} = \frac{3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et de même :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2} - 3^{-1/2}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

19. L'égalité $f(x) = g(x)$ pour la valeur $\frac{1}{2}\ln(3)$ donne donc :

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$$

Il en découle que :

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)$$

On en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 4 : décomposition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \exists r \in \mathbb{N}^* \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r \quad n = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_r} = \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i}$$

Pour $n = 1$, on pose $r = 1$ et $\alpha_1 = 0$, ainsi $2^{\alpha_1} = 1$. Dès lors, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ soit vérifiée.

- Si $n + 1$ est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k$. Notons que comme $n \geq 0$, $2k > 0$, dès lors, $k \geq 1$. Alors $n + 1 = 2k > k$, ainsi $k \leq n$. Dès lors, $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, ainsi $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée. Ainsi, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que

$$k = \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$$

Alors

$$n = 2k = 2 \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^r 2 \times 2^{\alpha_i} = 2^{\alpha_i+1}$$

Le résultat s'ensuit alors, en posant $\beta_i = \alpha_i + 1 \in \mathbb{N}$, on a bien $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_r$.

- Si $n + 1$ est impair, alors n est pair, utilisons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $n = \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i}$ supposons que $\alpha_1 = 0$, alors pour tout $i \in \llbracket 2; r \rrbracket$, $\alpha_i > \alpha_1 = 0$, donc $\alpha_i \geq 1$. Ainsi $n = 1 + 2 \sum_{i=2}^r 2^{\alpha_i-1}$ est impair, ce qui est absurde. Ainsi, $\alpha_1 > 0$. Dès lors, $n + 1 = 2^0 + \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i}$, on pose alors $\beta_1 = 0$, et pour tout $i \in \llbracket 2; r \rrbracket$, $\beta_i = \alpha_{i+1}$ et $s = r + 1$, alors $n + 1 = \sum_{i=1}^s 2^{\beta_i}$ avec $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$.

Dès lors, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Par récurrence forte, on a donc montré que tout entier $n \geq 1$ s'écrit comme somme de puissance de 2 toutes distinctes : ainsi tout nombre entier naturel non nul se décompose en binaire.