

- La fonction $x \mapsto \ln(|x - 2|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x - 2}$ sur $]2; +\infty[$ et sur $]-\infty; 2[$.
- Ceci est une équation différentielle linéaire du première ordre.
 - Résolvons l'équation différentielle homogène associée, c'est-à-dire $y' + \frac{1}{x - 2}y = 0$. Si on pose $a: x \mapsto \frac{1}{x - 2}$, alors une primitive de a sur $]2; +\infty[$ est, d'après la question précédente, $A: x \mapsto \ln(x - 2)$. D'après le cours les solutions de l'équation homogène sont exactement de la forme $x \mapsto Ce^{-\ln(x-2)} = \frac{C}{x - 2}$.
 - Par la méthode de la variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme $y_p: x \mapsto C(x)e^{-\ln(x-2)} = \frac{C(x)}{x - 2}$ avec C une fonction dérivable sur $]2; +\infty[$. Alors, par produit, y_p est dérivable et

$$y'_p: x \mapsto \frac{C'(x)(x - 2) - C(x)}{(x - 2)^2}$$

Ainsi, pour tout $x > 2$,

$$y'_p(x) + \frac{1}{x - 2}y(x) = \frac{C'(x)(x - 2) - C(x)}{(x - 2)^2} + \frac{C(x)}{(x - 2)^2} = \frac{C'(x)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{C'(x)}{x - 2}$$

On cherche donc C une fonction dérivable, telle que pour tout $x > 2$, $C'(x) = 2$. Prenons alors $C: x \mapsto 2x$. Ainsi, $y_p: x \mapsto \frac{2x}{x - 2}$ est une solution particulière.

- Dès lors, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{2x}{x - 2} + \frac{C}{x - 2}$ où C est une constante.
- Posons $y: x \mapsto \frac{2x}{x - 2} + \frac{C}{x - 2}$ où $C \in \mathbb{R}$, alors $y(3) = \frac{6}{1} + \frac{C}{1}$, ainsi, $y(3) = 1$ si et seulement $C = -5$.

Ainsi la seule solution de l'équation différentielle qui vérifie $y(3) = 1$ est la fonction $x \mapsto \frac{2x - 5}{x - 2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $h(x)$ est définie si et seulement $x - 2 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 2$. Ainsi, l'ensemble de définition de h est $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

4. **def Fonctionh(x):**
return (2*x-5)/(x-2)

5. $h(0) = \frac{5}{2}$, $h(1) = 3$, $h(3) = 1$.

- Montrons que la fonction h n'est ni paire ni impaire (proposons deux méthodes¹):
 - L'ensemble de définition de h n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet $-2 \in D$ mais $2 \notin D$, donc h ne peut pas être paire et h ne peut pas être impaire.
 - $h(1) = 3$ et $h(-1) = \frac{7}{3}$, donc $h(1) \neq h(-1)$ donc h n'est pas paire, et $h(1) \neq -h(1)$ donc h n'est pas impaire.

- La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D , ainsi h est dérivable sur D et pour tout $x \in D$:

$$h'(x) = \frac{2(x - 2) - (2x - 5)}{(x - 2)^2} = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

8. L'équation de la tangente de h en 0 est $x \mapsto h(0) + h'(0)(x - 0) = \frac{5}{2} + \frac{x}{4}$.

- f croissante sur D ssi $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$
 - f non croissante sur D ssi $\exists (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \text{ et } f(x) > f(x')$
 - f décroissante sur D ssi $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$
 - f non décroissante sur D ssi $\exists (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \text{ et } f(x) < f(x')$

- Posons $x = 1$ et $x' = 3$, alors on a bien $x \leq x'$ et $f(x) = 3 > f(x') = 1$, ainsi la fonction f n'est pas croissante sur D . Posons maintenant $x = 0$ et $x' = 1$, alors on a bien $x \leq x'$ et $f(x) = 5/2 < f(x') = 3$, ainsi la fonction f n'est pas décroissante sur D .

1. Une seule suffisait sur vos copies.

11. Pour tout $x \in D$,

$$h(x) = \frac{2x - 4 - 1}{x - 2} = \frac{2x - 4}{x - 2} + \frac{-1}{x - 2} = 2 + \frac{-1}{x - 2}$$

On obtient alors le résultat voulu avec $a = 2$ et $b = -1$.

12. La dérivée de h est strictement positive sur l'intervalle $]2; +\infty[$ donc la fonction h est strictement croissante sur $]2; +\infty[$. La dérivée de h est strictement positive sur l'intervalle $] -\infty; 2[$, donc h est strictement croissante sur $] -\infty; 2[$. De plus, pour tout $x \in D \cap \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = \frac{x(2 - 5/x)}{x(1 - 1/2)} = \frac{2 - 5/x}{1 - 2/x}$$

ainsi, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 2$. Ainsi, la fonction h a une asymptote horizontale, d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, $2x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -1$ et $x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 0^+$, par quotient $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -\infty$. De même, $2x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} -1$ et $x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} 0^-$ par quotient $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} +\infty$. Ainsi, la droite $x = 2$ est une asymptote verticale à f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	+		+
$h(x)$	2 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↘ 2

13. On obtient donc le graphe suivant :

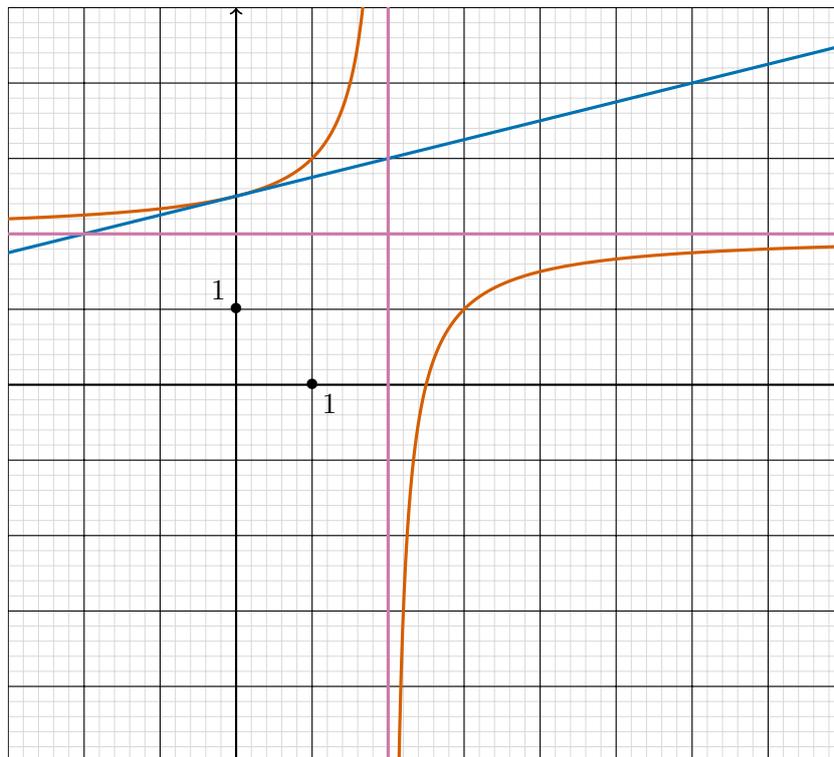


FIGURE 1 – La courbe représentative de h en rouge, les asymptotes en violet et la tangente en 0 en bleu.

14. En utilisant l'expression de h trouvé à la question 11 :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} h(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} 2 - \frac{1}{x-2} dx = [2x - \ln(|x-2|)]_1^{\frac{3}{2}} = 3 - \ln(2 - 3/2) - 2 + \ln(1) = 1 + \ln(2)$$

15. Posons $x = e^t$, alors $dx = e^t dt = x dt$, dès lors $dt = \frac{dx}{x}$, de plus, lorsque $t = 0$, $x = 1$ et lorsque $t = \ln(3/2)$, $x = 3/2$, ainsi en effectuant le changement de variable on trouve :

$$\int_0^{\ln(3/2)} \frac{2e^{2t} - 5e^t}{e^t - 2} dt = \int_1^{3/2} \frac{2x^2 - 5x}{x-2} \frac{dx}{x} = \int_1^{3/2} \frac{2x-5}{x-1} dx = 1 + \ln(2)$$

Où on a utilisé le résultat de la question précédente.

16. Posons, pour tout $t \in [0; \ln(3/2)]$, $u(t) = e^{2t} - 5e^t$ et $v(t) = \frac{-1}{e^t - 2}$, remarquons que les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \ln(3/2)]$ et que $u'(t) = 2e^{2t} - 5e^t$ et $v'(t) = \frac{e^t}{(e^t - 2)^2}$, ainsi, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^{2t} - 5e^t}{(e^t - 2)^2} e^t dt &= \int_0^{\ln(3/2)} u(t)v'(t) dt = \left[\frac{e^{2t} - 5e^t}{2 - e^t} \right]_0^{\ln(3/2)} - \int_0^{\ln(3/2)} (e^{2t} - 5e^t) \times \frac{-1}{e^t - 2} dt \\ &= \frac{9}{4} - 5 \times \frac{3}{2} + 4 + 1 + \ln(2) = \frac{9 - 30}{2} + 5 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

17. Comme la fonction h est continue (car dérivable) sur $]2; +\infty[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $H: x \mapsto \int_3^x h(t) dt$ est une primitive de h sur $]2; +\infty[$, par conséquent, H est dérivable sur $]2; +\infty[$ et pour tout $x > 2$, $H'(x) = h(x)$.

18. Comme $-4 = 4e^{i\pi}$, le cours affirme que les racines n -ièmes de -4 sont $\sqrt[n]{4}e^{i\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. En particulier, les racines carrées de -4 sont $2i$ et $-2i$.

19. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$

- (a) $\frac{2x-5}{x-2} = 0$ ssi $2x-5 = 0$ ssi $x = 5/2$. La seule solution est $x = 5/2$
- (b) $\frac{2x-5}{x-2} = 1$ ssi $2x-5 = x-2$ ssi $x = -2+5$ ssi $x = 3$. La seule solution est $x = 3$
- (c) $\frac{2x-5}{x-2} = 2$ ssi $2x-5 = 2(x-2)$ ssi $2x-5 = 2x-4$ ssi $-5 = -4$. Il n'y a donc pas de solution à cette équation.
- (d) $\frac{2x-5}{x-2} = x$ ssi $2x-5 = x(x-2)$ ssi $x^2 - 4x + 5 = 0$ ceci est une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 20 = -4$, en posant alors $\delta = 2i$, on a $\Delta = \delta^2$, ainsi les solutions sont :

$$\frac{4+2i}{2} = 2+i \quad \text{et} \quad \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

Remarquons qu'aucune de ces solutions ne vaut 2, ainsi les solutions de l'équation $\frac{2x-5}{x-2} = x$ sont $2-i$ et $2+i$.

20. On dit que f est bijective de I sur J si :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$$

21. Comme l'équation $h(x) = 2$ n'a pas de solution et que $h(x)$ est un réel pour tout $x \in D$, on peut déjà affirmer que $h: D \rightarrow D$. Soit $y \in D$ et $x \in D$, alors :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = \frac{2x-5}{x-2} \iff (x-2)y = 2x-5 \iff xy - 2y = 2x-5 \\ &\iff x(y-2) = -5+2y \iff x = \frac{2y-5}{y-2} \end{aligned}$$

Remarquons que la dernière équivalence est bien licite car $y \neq 2$. Ainsi, pour tout $y \in D$, on a trouvé un seul antécédent de y par la fonction h qui vaut $x = \frac{2y-5}{y-2} = h(y)$, comme l'équation $h(y) = 2$ n'a pas de solution, on en déduit que $x \in D$. Dès lors, pour tout $y \in D$, il existe un unique $x \in D$ tel que $y = h(x)$. De plus, $x = h(y)$. Par conséquent, la fonction h est une bijection de D vers D et $h^{-1}: y \mapsto x = h(y)$. Ainsi, $h^{-1} = h$.

22. Soit $n \in \mathbb{Z} \cap D$ Supposons que $h(n) \in \mathbb{Z}$, alors $h(n) = 2 + \frac{-1}{n-2} \in \mathbb{Z}$ donc $\frac{1}{n-2} = 2 - h(n) \in \mathbb{Z}$ donc $n - 2$ divise 1, donc $n - 2 = 1$ ou $n - 2 = -1$ d'où $n = 3$ ou $n = 1$. Réciproquement, si $n = 3$, alors $h(n) = 1 \in \mathbb{Z}$ et si $n = 1$, alors $h(n) = 3 \in \mathbb{Z}$. Dès lors, l'ensemble des $n \in \mathbb{Z} \cap D$ tels que $h(n) \in \mathbb{Z}$ est exactement $\{1, 3\}$.

23. $u_1 = h(u_0) = h(0) = 5/2$, $u_2 = h(5/2) = \frac{2 \times 5/2 - 5}{5/2 - 2} = 0$, $u_3 = h(u_2) = h(0) = 5/2$.

24. On conjecture que $u_n = 0$ dès que n est pair et que $u_n = 5/2$ si n est impair. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(p)$, « $u_{2p} = 0$ » Alors, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $u_0 = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Calculons $u_{2(p+1)}$:

$$u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = h(u_{2p+1}) = h(h(u_{2p})) \stackrel{\mathcal{P}(p)}{=} h(h(0)) = h(5/2) = h(u_1) = u_2 = 0$$

Dès lors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et alors $u_n = u_{2p} = 0$, si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et alors $u_n = u_{2p+1} = h(u_{2p}) = h(0) = 5/2$.

25. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ si n est pair et que $u_n = u_1$ si n est impair. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(p)$, « $u_{2p} = u_0$ » Alors, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $u_0 = u_0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Calculons $u_{2(p+1)}$:

$$u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = h(u_{2p+1}) = h(h(u_{2p})) \stackrel{\mathcal{P}(p)}{=} h(h(u_0)) = h^{-1}(h(u_0)) = u_0$$

Où l'on a utilisé que $h = h^{-1}$ d'après la question 21. Dès lors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et alors $u_n = u_{2p} = u_0$, si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et alors $u_n = u_{2p+1} = h(u_{2p}) = h(u_0) = u_1$.

Avec $u_1 = \frac{2u_0 - 5}{u_0 - 2}$.

26. Soit $w \in \mathbb{C}$, $h(w)$ est défini ssi $cw + d \neq 0$ ssi $w \neq -\frac{d}{c}$ ($c \neq 0$). Ainsi, l'ensemble de définition de h est

$$D_h = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

27. Soit $w \in D_h$, alors $h(w) = w$ ssi $aw + b = w(cw + d)$ ssi $cw^2 + w(d - a) - b = 0$. Or ceci est une équation du second degré, il y a donc deux solutions complexes lorsque le discriminant $\Delta = (d - a)^2 + 4bc \neq 0$ et une seule solution complexe si $\Delta = 0$.

Cependant², on cherche les solutions non pas dans \mathbb{C} mais dans D_h . Or, si $-\frac{d}{c}$ était solution de l'équation du second degré, cela ne serait pas pour autant une solution de l'équation $h(w) = w$. Calculons, alors

$$c \left(-\frac{d}{c} \right)^2 + \left(-\frac{d}{c} \right) (d - a) - b = \frac{d^2 - d(d - a) - bc}{c} = \frac{ad - bc}{c} \neq 0$$

Ainsi, $-\frac{d}{c}$ n'est jamais solution de l'équation du second degré, on obtient donc autant de solution à l'équation $h(w) = w$ sur D_h que de solution de $cw^2 + w(d - a) - b = 0$ dans \mathbb{C} . Ainsi, si $(d - a)^2 + 4bc = 0$ l'équation $h(w) = w$ a une seule solution, et si $(d - a)^2 + 4bc \neq 0$, l'équation $h(w) = w$ a deux solutions distinctes.

28. Soit $y \in \mathbb{C}$ et $x \in D_h$, alors :

$$y = h(x) \iff y = \frac{ax + b}{cx + d} \iff y(cx + d) = ax + b \iff x(cy - a) = b - dy$$

Il y a alors deux cas :

- Si $y = a/c$ et $b - dy = b - ad/c = (ad - bc)/c \neq 0 = x(cy - a)$ et l'équation n'aurait alors pas de solution. Ainsi, $y = a/c$ n'est pas dans l'image de h . Donc $h(D_h) \subset \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

2. Et c'est assez subtile.

- Si $y \neq a/c$, alors $cy - a \neq 0$ et on peut diviser par $cy - a$, ainsi en reprenant nos équivalences, $y = h(x)$ ssi $x = (b - dy)/(cy - a)$. Ainsi, dans ce cas, y est bien dans l'image car $y = h(x)$, ainsi $\mathbb{C} \setminus \{a/c\} \subset h(D_h)$

Ainsi, par double inclusion, $h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

29. La question précédente a montré que $h: D_h \rightarrow h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ et que pour tout $y \in h(D_h)$, $y = h(x)$ avec $x = (b - dy)/(cy - a)$, ainsi, h est une bijection de D_h vers $h(D_h)$ est $h^{-1}: y \mapsto (-dy + b)/(cy - a)$. si on note $a' = -d$, $b' = b$, $c' = c$ et $d' = -a'$, alors $h^{-1}: w \mapsto a'w + b'/c'w + d'$ est bien une homographie.
30. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, pour que $g \circ h(\omega)$ soit défini, il faut deux choses : que $\omega \in D_h$ et que $h(\omega) \in D_g = \mathbb{C} \setminus \{-d'/c'\}$. Il y a deux cas :
- Si $-d'/c' = a/c$, alors pour tout $\omega \in D_h$, $h(\omega) \neq a/c = -d'/c'$, ainsi dans ce cas, $g \circ f$ a pour ensemble de définition $D_{g \circ f} = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$
 - Si $-d'/c' \neq a/c$, alors il existe un unique $\omega \in D_h$ tel que $h(\omega) = -d'/c'$ (c'est $h^{-1}(d'/c')$), dans ce cas, $g \circ f$ a pour ensemble de définition $D_{g \circ f} = \mathbb{C} \setminus \{-d/c, h^{-1}(d'/c')\}$.

Soit $\omega \in D_{g \circ f}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\omega) &= g(f(\omega)) = \frac{a'f(\omega) + b'}{c'f(\omega) + d'} = \frac{a' \frac{aw + b}{cw + d} + b'}{c' \frac{aw + b}{cw + d} + d'} = \frac{a'(aw + b) + b'(cw + d)}{c'(aw + d) + d'(cw + d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)w + a'b + b'd}{(c'a + d'c)w + c'b + dd'} \end{aligned}$$

En posant $\alpha = a'a + b'c$, $\beta = a'b + b'd$, $\gamma = c'a + d'c$ et $\delta = c'b + dd'$, $g \circ f: \omega \mapsto \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ est bien une homographie.

31. **def Suitev**(n,v,a,b,c,d) :

```
vn=v
for i in range(n):
    vn=(a*vn+b)/(c*vn+d)
return vn
```

32. **def Suitevliste**(n,v,a,b,c,d) :

```
vn=v
L=[vn]
for i in range(n):
    vn=(a*vn+b)/(c*vn+d)
    L.append(vn)
return L
```

33. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - z_1}{v_{n+1} - z_2} = \frac{\frac{av_n + b}{cv_n + d} - z_1}{\frac{av_n + b}{cv_n + d} - z_2} = \frac{av_n + b - z_1(cv_n + d)}{av_n + b - z_2(cv_n + d)} = \frac{(a - cz_1)v_n + b - dz_1}{(a - cz_2)v_n + b - dz_2}$$

Remarquons que comme $h(z_1) = z_1 \in h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, ainsi $z_1 \neq a/c$, ceci prouve que $a - cz_1 \neq 0$. Pour les mêmes raisons, $a - cz_2 \neq 0$, ainsi :

$$w_{n+1} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \times \frac{v_n + \frac{b - dz_1}{a - cz_1}}{v_n + \frac{b - dz_2}{a - cz_2}}$$

Comme $h(z_1) = z_1$, en appliquant h^{-1} , on obtient $z_1 = h^{-1}(z_1) = \frac{-dz_1 + b}{cz_1 - a}$, de même pour z_2 , ainsi

$$w_{n+1} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \times \frac{v_n - z_1}{v_n - z_2} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} w_n$$

Ceci prouve que $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{a - cz_1}{a - cz_2}$.

34. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{a - cz_1}{a - cz_2} \right)^n w_0$.

35. D'après ce qui précède, $\frac{v_n - z_1}{v_n - z_2} = w_n$, ainsi $v_n - z_1 = (v_n - z_2)w_n$, dès lors, $v_n(1 - w_n) = z_1 - z_2w_n$.
Notons alors que w_n est différent de 1, en effet si $w_n = 1$, alors $v_n(1 - w_n) = 0$ tandis que $z_1 - z_2w_n = z_1 - z_2 \neq 0$. Ainsi, on peut diviser par $1 - w_n$, dès lors, et donc $v_n = \frac{z_1 - z_2w_n}{1 - w_n}$ avec la valeur de w_n trouvé à la question précédente, on a alors une expression explicite de v_n .

36.