DS3

3 décembre 2022

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Exercice 1 : si t'aimes les systèmes, les systèmes t'aiment !

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lll} 2x+y+3z & = & -1 \\ x+y-z & = & 1 \\ 3x+y+5z & = & -1 \end{array}\right.$.

Exercice 2 : c'est l'histoire d'une suite qui prend la tangente (vers π) !

1. Rappeler, sans preuve, l'ensemble de définition de tan, l'ensemble de définition de sa dérivée ainsi que l'expression de cette dérivée.
2. Également sans preuve, rappeler, sans preuve, l'ensemble de définition de arctan, l'ensemble de définition de sa dérivée ainsi que l'expression de cette dérivée.
3. Recopiez et compléter les phrases suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \qquad & \arctan(\tan(x)) = x \\ \forall x \in \qquad & \tan(\arctan(x)) = x \end{array}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Calculer I_0, I_1 et I_2.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
6. Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
7. En posant $u = \tan(t)$ démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$.
8. Donner alors la valeur de I_3, I_4, I_5 et I_6.
9. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{2p} = (-1)^p \left(\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ et $I_{2p+1} = (-1)^p \left(\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dfrac{(-1)^k}{2k}\right)$
10. Soit $\varepsilon > 0$, expliciter un entier $n_0 \geqslant 2$ tel que $\dfrac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon$.
11. Déduire de tout ce qui précède un algorithme Python qui permet d'approximation de π avec une marge d'erreur plus petite que $\varepsilon > 0$.
12. Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et inclus dans l'ensemble de définition de tan.
13. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

Exercice 3 : les sommes doubles ? Plutôt deux fois qu'une !

On rappelle que, par convention $0^0 = 1$, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$S_p(n) = \sum_{j=0}^{n} j^p$$

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Donner, sans preuve, la valeur $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
3. À l'aide d'une somme double, démontrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) = S_{p+1}(n+1)$$

4. En déduire que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n) = (n+1)^{p+1}$$

5. Grâce à la formule précédente, retrouver la valeur des sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Exercice 4 : alinjecta est ?

1. Soit $f\colon E \to F$. Donner la définition de f injective (avec des quantificateurs).
   Nier cette définition (avec des quantificateurs).
2. Soit $f\colon E \to F$. Donner la définition de f surjective (avec des quantificateurs).
   Nier cette définition (avec des quantificateurs).
3. L'application $\psi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (2x+3y-1, x+2y-8) \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?
4. Si ψ est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque ψ^{-1}.
5. L'application $\phi\colon \begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (n,p) & \longmapsto n+\dfrac{1}{p} \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5 : soyez inclusifs !

On rappelle que $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

1. Décrire explicitement l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$

Exercice 6 : je sèche sur celui-là, un point bonus pour qui trouve un titre !

1. Résoudre l'équation $y' + y = 0$.
2. Résoudre l'équation $y' + y = \displaystyle\int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t$.