Exercice 1 : si t'aimes les systèmes, les systèmes t'aiment !

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+3z &=& -1 \\ x+y-z &=& 1 \\ 3x+y+5z &=& -1 \end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 1 \\ 2x+y+3z &=& -1 \\ 3x+y+5z &=& -1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 1 \\ 0-y+5z &=& -3 \\ 0-2y+8z &=& -4 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z &=& 1 \\ 0-y+5z &=& -3 \\ 0+0+-2z &=& -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(2,-2,-1)\}$.

Exercice 2 : c'est l'histoire d'une suite qui prend la tangente (vers π) !

1. La fonction tangente est défini sur $D=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ($D=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ était aussi une réponse acceptable). Elle est dérivable sur D et pour tout $x\in D$, $\tan'(x)=1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
2. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
3.

$$\begin{array}{rl} \forall x\in\,]-\pi/2\,;\pi/2\,[& \arctan(\tan(x))=x \\ \forall x\in\mathbb{R} & \tan(\arctan(x))=x \end{array}$$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

4.
   - $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$
   - $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t=[-\ln(|\cos(t)|)]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln(1)=\frac{\ln(2)}{2}$
   - $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(t)+1-1\,\mathrm{d}t=[\tan(t)-t]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[\,0\,;\pi/4\,]$, $\sin(t)\geqslant 0$ et $\cos(t)>0$, par quotient, $\tan(t)\geqslant 0$, d'où $\tan^n(t)\geqslant 0$, par croissance de l'intégrale, $I_n\geqslant 0$.
6. Soit $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$I_n-I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)^n\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)^{n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)^n\left(1-\tan(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

   Soit $t\in\left[\,0\,;\frac{\pi}{4}\,\right]$, alors par croissance de la fonction tan sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{4}\,\right]$,

$$0=\tan(0)\leqslant\tan(t)\leqslant\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

   Ainsi, $1-\tan(t)\geqslant 0$ et par produit, $\tan(t)^n(1-\tan(t))\geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $I_n-I_{n+1}\geqslant 0$. Dès lors, $(I_n)_n$ est une suite croissante.
7. Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Par linéarité de l'intégrale, calculons I_n+I_{n-2} :

$$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}(t)\left[1+\tan^2(t)\right]\,\mathrm{d}t$$

   On pose alors $u=\tan(t)$, $\mathrm{d}u=1+\tan^2(t)\,\mathrm{d}t$, ainsi, par changement de variable :

$$I_n+I_{n-2}=\int_0^1 u^{n-2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u^{n-1}}{n-1}\right]_0^1=\frac{1}{n-1}$$

8. Donner alors la valeur de I_3, I_4, I_5 et I_6.

9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathscr{P}(p)$:« $I_{2p} = (-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ et $I_{2p+1} = (-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k}\right)$».
Pour $p = 1$:

$$\begin{aligned}
(-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) &= -\left(\frac{\pi}{4} - (-1)\right) = 1 - \frac{\pi}{4} = I_2 \\
(-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k}\right) &= -\left(\frac{\ln 2}{2} + (-\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = I_3
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie, alors en utilisant la relation de la question 7

$$\begin{aligned}
(-1)^{p+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) &= -(-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) \\
&= -I_{2p} + \frac{1}{2p+1} = I_{2p+2} = I_{2(p+1)} \\
(-1)^{p+1} \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^k}{2k}\right) &= -(-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{p+1}}{2(p+1)}\right) \\
&= -I_{2p+1} + \frac{1}{2p+2} = I_{2p+3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

10. $$\frac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon \iff 1 + \varepsilon < n_0\varepsilon \iff \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} < n_0 \iff n_0 > E\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$
Ainsi, $n_0 = E\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 1$ convient.

11. Déduire de tout ce qui précède un algorithme Python qui permet d'approximation de π avec une marge d'erreur plus petite que $\varepsilon > 0$.

12. Remarquons que $]-\pi/2\,;\pi/2[$ est un intervalle contenant 0 et inclus dans l'ensemble de définition de tan. Montrons que c'est le plus grand. Soit J le plus grand intervalle contenant 0 et inclus dans l'ensemble de définition de tan. Montrons que $J =]-\pi/2\,;\pi/2[$, comme J est le plus grand $]-\pi/2\,;\pi/2[\subset J$. Soit $x \in J$, montrons que $J \in]-\pi/2\,;\pi/2[$, supposons que $x \geqslant \pi/2$. Alors $0 \leqslant \pi/2 \leqslant x$, comme J est un intervalle, $0 \in J$ et $x \in J$, par la caractérisation des intervalles, $\pi/2 \in J$, or J est inclus dans l'ensemble de définition de tan donc $\pi/2$ est dans l'ensemble de définition de tan ce qui est absurde. Ainsi, $x < \pi/2$. De même $x > -\pi/2$. Dès lors, $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ et donc $J \subset]-\pi/2\,;\pi/2[$. Dès lors $J =]-\pi/2\,;\pi/2[$.

13. Comme on ne peut intégrer que des fonctions continues sur un segment, pour que la fonction soit défini en x il faut que $t \mapsto \tan^n(t)$ soit continue sur $[0\,;x]$ (ou $[x\,;0]$ si $x \leqslant 0$). En particulier, il faut que $[0\,;x]$ soit inclus dans l'ensemble de définition de tangente, ainsi $[0\,;x]$ est un intervalle contenant 0 et inclus dans l'ensemble de définition de tangente, d'après la question précédente, il faut donc que $[0\,;x] \subset]-\pi/2\,;\pi/2[$ il faut donc que $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$. Réciproquement, si $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$, alors $t \mapsto \tan^n(t)$ est continue sur $[0\,;x]$, donc $x \mapsto \int_0^x \tan^n(t)\,dt$ est définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$, dérivable sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ de dérivée $x \mapsto \tan^n(x)$ (théorème fondamental de l'analyse).

Exercice 3 : les sommes doubles ? Plutôt deux fois qu'une !

On rappelle que, par convention $0^0 = 1$, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On pose :

$$S_p(n) = \sum_{j=0}^{n} j^p$$

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2.
   - $S_0(n) = \sum\limits_{j=0}^{n} 1 = n+1$
   - $S_1(n) = \sum\limits_{j=0}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   - $S_2(n) = \sum\limits_{j=0}^{n} j^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, en permutant les sommes puis en reconnaissant la formule du binôme de Newton avant de faire un changement d'indices, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \sum_{j=0}^{n} j^k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} j^k 1^{p+1-k} = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^{p+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^{p+1} - 0^{p+1} = S_{p+1}(n+1) \end{aligned}$$

4. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n) &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) - \binom{p+1}{p+1} S_{p+1}(n) = S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k^{p+1} - \sum_{k=0}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} - \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} = (n+1)^{p+1} \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$
   - Appliquons la formule précédente avec $p=1$, on obtient alors $\binom{2}{0} S_0(n) + \binom{2}{1} S_1(n) = (n+1)^2$. Comme $S_0(n) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} 1 = n+1$, on en déduit que $2S_1(n) = (n+1)^2 - (n+1)$, en divisant par 2, on obtient que $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   - Appliquons la formule précédente avec $p=2$, on obtient alors $\binom{3}{0} S_0(n) + \binom{3}{1} S_1(n) + \binom{3}{2} S_2(n) = (n+1)^3$. Ainsi, $n+1+3\dfrac{n(n+1)}{2} + 3\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^3$. En isolant, la somme recherchée, on trouve que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4 : alinjecta est ?

1. Soit $f\colon E \to F$. Donner la définition de f injective (avec des quantificateurs).
   Nier cette définition (avec des quantificateurs).
2. Soit $f\colon E \to F$. Donner la définition de f surjective (avec des quantificateurs).
   Nier cette définition (avec des quantificateurs).
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a,b) = f(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& -3b + 2a - 22 \\ y &=& 2b - a + 15 \end{array} \right.$$

4. Si ψ est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque ψ^{-1}.
5.
   - Soit $(n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(n',p') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Supposons $\phi(n,p) = \phi(n',p')$. Alors $n + \dfrac{1}{p} = n' + \dfrac{1}{p'}$.
     Distingons les cas suivant la valeur de p.
     — Si $p=1$, alors $1/p' = n - n' - 1 \in \mathbb{Z}$. Alors nécessairement $p'=1$, dès lors $p = p'$ et donc $n + 1/p = n' + 1/p'$, il en découle que $n = n'$. Donc $(n,p) = (n',p')$.

— Si $p > 1$, alors $1/p \in]0;1[$. Remarquons que $p' = 1$, alors par ce qui précède $p = 1$ ce qui est exclut ici, donc $p' > 1$. Ainsi, $n + 1/p = n' + 1/p'$, avec $1/p$ et $1/p'$ dans $]0;1[$, donc n et n' sont les parties entières de $n + 1/p$. Dès lors $n = n'$. Il en découle que $1/p = 1/p'$. Donc $p = p'$, ainsi $(n,p) = (n',p')$

Il en découle que ϕ est injective.

- Considérons $2/3 \in \mathbb{Q}$, supposons, qu'il existe $(n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $2/3 = n + 1/p$, remarquons que $p = 1$ est impossible, donc $p > 2$. Ainsi, n est la partie entière de $\frac{2}{3}$. Donc $n = 0$, mais alors $1/p = 2/3$. Soit $3 = 2p$. Donc 3 est pair ce qui est absurde. Donc $2/3$ n'admet pas d'antécédent par ϕ. Donc ϕ n'est pas surjective.

Exercice 5 : soyez inclusifs !

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0 ; n-1]\!] \right\}$.
2. Montrons que $\mathbb{U}_n \subset U_p$ ssi $n|p$. Supposons que $n|p$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = nk$. Soit $x \in \mathbb{U}_n$, alors $x^n = 1$, ainsi en élevant à la puissance k, on obtient $(x^n)^k = 1^k = 1$. Dès lors, $x^p = 1$ donc $x \in \mathbb{U}_p$. Ceci démontre que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$.

   Réciproquement, supposons que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$. Alors comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$, on en déduit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{U}_p$. Ainsi, il existe $k \in [\![0 ; p-1]\!]$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{p}}$. Ainsi, $2\pi/n$ et $2k\pi/p$ sont deux arguments du même nombre complexe et ils sont tous les deux dans $[0;2\pi[$. Or, s'il n'y a pas unicité de l'argument, on a toujours unicité de l'argument dans $[0;2\pi[$. On en déduit que $2\pi/n = 2k\pi/p$. Dès lors $p = kn$ et donc n divise p.

   En conclusion, nous avons démontré que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_p$ si et seulement si p divise n.

Exercice 6 : je sèche sur celui-là, un point bonus pour qui trouve un titre !

1. Les solutions sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.
2. Remarquons que ceci n'est pas une équation différentielle normale, en effet le second membre est une constante qui dépend elle-même de y l'inconnue. Pour cette raison, aucune méthode du cours ne s'applique. Raisonnons par analyse-synthèse :
   - Supposons que f soit une solution, alors $f' + f = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Posons $b = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En particulier, f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants $y' + y = b$. Remarquons que : $t \mapsto b$ est une solution particulière[1]. Ainsi, les solutions de $y' + y = b$ sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + b$ avec $C \in \mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
   $$f : t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + b$$
     En particulier, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 C\mathrm{e}^{-t} + b\mathrm{d}t$. Par linéarité de l'intégrale, il vient que $b = C(1 - \mathrm{e}^{-1}) + b$. Ainsi, $C(1 - \mathrm{e}^{-1}) = 0$, comme $1 - \mathrm{e}^{-1} \neq 0$, on en déduit que $C = 0$, ainsi $f : t \mapsto b$.
   - Supposons que $f : t \mapsto b$ avec $b \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + f(t) = 0 + b$. De plus, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = b$. Ainsi, f est bien solution de l'équation.

   Ainsi les solutions sont exactement les fonctions constantes.

1. Grâce à la physique, vous devez savoir résoudre les équations différentielles du premier ordre à coefficients constant et à second membre constant.