DS4

14 janvier 2022

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Exercice : les matrices montent en puissance (et vous aussi !)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, à quelle condition sur n, p, q et r, le produit AB est-il possible ? Lorsqu'il est possible donner la taille de la matrice $C = AB$ ainsi que l'expression des coefficients de C.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton pour les matrices.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI_2 + E_{1,2}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n.
4. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
5. Posons $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n.

Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On définit la matrice $B = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Calculer B^2.
8. Montrer, par récurrence, que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3 \qquad B^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On exhibera les relations de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   On prouvera notamment que $c_{n+1} = pc_n + (1-p)$. Préciser $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.
9. Déterminer une expression de c_n en fonction de n.
10. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$.
11. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice : vous aurez de multiples points sur la multiplicité des racines

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $P_\alpha = X^3 - \alpha X^2 + \alpha X - 1$.

1. Montrer que 1 est une racine de P_α. Par quel polynôme peut-on donc factoriser P_α ?
2. Déterminer, selon la valeur de α, la multiplicité de 1 en tant que racine de P_α.
3. Que valent s et p où s est la somme et p est le produit des racines de P_α ?
4. Déterminer, en fonction de α, toutes les racines complexes de P_α.

Problème 1 : Wall is back (le retour du mur)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t, \qquad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n, \qquad \text{et} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

On remarque que $I_n = W_{2n}$ (intégrale de Wallis).

1. Écrire une fonction Python nommée `SuiteS(n)` qui à `n` entier naturel non nul renvoie S_n.
2. Écrire une fonction Python **récursive** nommée `Factorielle(n)` qui renvoie la factorielle de n.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = S_n + \dfrac{1}{n}$, démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites qui convergent vers la même limite réelle.
4. Calculer I_0 et J_0.
5. Démontrer que $(I_n)_n$ est une suite décroissante de termes positifs.

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

Le résultat de la question 6 ne sera pas utilisé par la suite.

7. Donner une primitive de $t \mapsto \cos^{2n}(t)\sin(t)$ et la dérivée de $t \mapsto \sin(t)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $I_{n+1} - I_n$ et en procédant par une intégration par parties, démontrer que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$
9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.
    On pourra écrire $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$, et intégrer par parties en primitivant $t \mapsto 1$, puis procéder à une deuxième intégration par partie en primitivant $t \mapsto t$.
11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.
12. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K_{i-1} - K_i$.
13. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\pi}{4} S_n = J_0 - K_n$
14. Démontrer que pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.
15. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

16. En déduire que la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Problème 2 : les polynômes de la ferme

Cas particulier $\mathbb{R}_2[X]$

1. Si P et Q sont deux polynômes que peut-on **toujours** dire de $d^\circ(P+Q)$ ou $d^\circ(P-Q)$?
2. Factoriser le polynôme $2X^2 + 10X + 12$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Donner un exemple de polynôme P de degré 2 tel que 3 et 4 soient racines de P. Que vaut $P(5)$?
4. En déduire alors un exemple de polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
   On pourra remarquer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $Q = \lambda P$, alors, on on a encore $Q(3) = Q(4) = 0$.
5. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
   On pourra prendre deux tels polynômes Q et R et étudier les racines de $Q - R$.

On note maintenant L_1 l'unique polynôme de degré 2 tel que $L_1(3) = L_1(4) = 0$ et $L_1(5) = 1$.

6. Donner alors, sans preuve et sous forme factorisée :
   - L_2 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_2(3) = L_2(5) = 0$ et $L_2(4) = 1$
   - L_3 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_3(4) = L_3(5) = 0$ et $L_3(3) = 1$.
7. Énoncer le théorème de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par L_1.
9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.
   On pourra considérer les racines de la différence entre ces deux polynômes.
10. En déduire qu'il existe trois constantes λ_1, λ_2 et λ_3 tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = P(5)\lambda_1 + P(4)\lambda_2 + P(3)\lambda_3$$

Cas général

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de réels deux à deux distincts. Fixons $i \in [\![0\,; n]\!]$.

11. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0\,; n]\!] \setminus \{i\}$, a_j soit racine de P.
12. Déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0\,; n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
    On rappelle que $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$
13. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, démontrer que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k) L_k$.
14. Que valent $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k L_k$?