

Exercice d'algèbre

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x = y \text{ et } y + z + t = 0\}$.

- $F \subset \mathbb{R}^4$
 - $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$, or $0 = 0$ et $0 + 0 + 0 = 0$, ainsi $0_{\mathbb{R}^4} \in F$.
 - Soient $u = (x, y, z, t) \in F$, $v = (x', y', z, t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

Comme $(u, v) \in F^2$:

$$\begin{aligned} \lambda x + x' &= \lambda y + y' \\ (\lambda y + y') + (\lambda z + z') + (\lambda t + t') &= \lambda(x + y + z) + (x' + y' + z') = \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\lambda u + v \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

On note $f_1 = (1, 1, -2, 1)$, $f_2 = (0, 0, -1, 1)$ et $f_3 = (1, 1, 1, 1)$.

- Comme $1 = 1$ et $1 + (-2) + 1 = 0$, $f_1 \in F$. De même $0 = 0$ et $0 + (-1) + 1 = 0$, ainsi $f_2 \in F$. En revanche $1 + 1 + 1 \neq 0$, donc $f_3 \notin F$.
- D'après la question précédente, $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$. Dès lors, F est un SEV de $\mathbb{R}^4$ qui contient f_1 et f_2 . Or, d'après le cours, $\text{vect}(f_1, f_2)$ est le plus petit SEV, au sens de l'inclusion, de $\mathbb{R}^4$ à contenir f_1 et f_2 . Dès lors¹, $\text{vect}(f_1, f_2) \subset F$. Réciproquement, soit $u = (a, b, c, d) \in F$, alors $a = b$ et $b + c + d = 0$. Donc,

$$u = (a, a, -d - a, d) = (a, a, -2a, a) + (0, 0, a - d, d - a) = af_1 + (d - a)f_2 \in \text{vect}(f_1, f_2)$$

Ceci démontre que $F \subset \text{vect}(f_1, f_2)$. Par double inclusion, $F = \text{vect}(f_1, f_2)$.

- Méthode courte** : (f_1, f_2) est libre (deux vecteurs non colinéaires), et $f_3 \notin F = \text{vect}(f_1, f_2)$. Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
 - Méthode pédestre** : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, supposons $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_E$. Alors

$$(a + c, a + c, -2a - b + c, a + b + c) = (0, 0, 0, 0)$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + c = 0 \\ -2a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ 3c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Problème d'analyse

Préliminaires

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1 > 0$. Ainsi, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$, en tant que fonction polynomiale, est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- Comme pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$, par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + (2x) \times 2 \times (2x)(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = 2 \frac{3x^2 - 1}{(1 + x^2)^3}$$

1. Si on n'aime pas cette méthode de voir les choses, en voilà une autre : soit $u \in \text{vect}(f_1, f_2)$, alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = af_1 + bf_2$, comme $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$ et que F est un SEV, $u \in F$. Dès lors, $\text{vect}(f_1, f_2) \subset F$.

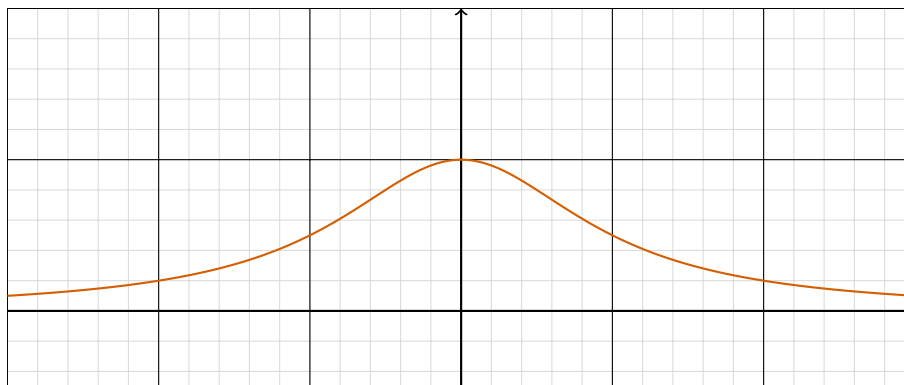


FIGURE 1 – Graphe de la fonction f .

- Pour $x \in \left[-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave sur $\left[-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right]$.
- Pour $x \in \left[1/\sqrt{3}; +\infty\right[$, $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f convexe sur $\left[1/\sqrt{3}; +\infty\right[$
- Pour $x \in \left]-\infty; 1/\sqrt{3}\right]$, $f''(x) \geq 0$. Ainsi, f convexe sur $\left]-\infty; 1/\sqrt{3}\right]$

3. Les fonctions $\sin$ et sh sont dérivables en 0. Ainsi,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$$

4. Pour $x \in]0; \pi[$, d'après ce qui précède, $g(x) = \frac{\frac{\text{sh}(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité est la fonction :

$$\tilde{g}: \begin{cases} [0; \pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

5. Comme $\sin$ et sh sont continues, il vient que $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi} \text{sh}(\pi) > 0$ et $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} \sin(\pi) = 0$, comme $\sin$ est strictement positive sur $]0; \pi[$, on en déduit par quotient que $\tilde{g}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} +\infty$. Dès lors, $\tilde{g}$ n'est pas prolongeable par continuité en π .

Une suite récurrente

6. Notons $h: x \mapsto x^3 + x - 1$. Remarquons que h est continue sur $\mathbb{R}$, car polynomiale. De plus, $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$, donc $h(0) \leq 0 \leq h(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0; 1]$ tel que $h(\alpha) = 0$. Comme h ne s'annule ni en 0 ni en 1, on a $0 < \alpha < 1$. De plus, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Ainsi, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(\alpha) = 0$. On a de plus, prouvé que $0 < \alpha < 1$.
7. On a $\alpha^3 + \alpha - 1 = 0$. Alors, $f(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{\alpha + \alpha^3} = \frac{\alpha}{1}$. Ceci démontre que α est un point fixe de f .
8. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un **intervalle** I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, f est M -lipschitzienne sur I : pour tout $(x, x') \in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$.

9. D'après le résultat de la question 2, pour $x \in [0; 1/\sqrt{3}]$, $f''(x) \leq 0$ et pour $x \in [1/\sqrt{3}; 1]$, $f''(x) \geq 0$. On en déduit donc le tableau de variation de f' :

x	0	$1/\sqrt{3}$	1
$f''(x)$	—	0	+
$f'(x)$	0	$f'(1/\sqrt{3})$	$-\frac{1}{2}$

FIGURE 2 – Tableau de variation de f'

Ceci montre que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f'(1/\sqrt{3}) \leq f'(x) \leq 0$$

Comme la valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq |f'(1/\sqrt{3})|$. Posons alors $C = |f'(1/\sqrt{3})|$. Comme f est continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et que pour tout $x \in]0; 1[$, $|f'(x)| \leq C$, l'inégalité des accroissements finis stipule que f est C -lipschitzienne : pour tout $(x, x') \in [0; 1]^2$, $|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$. On a de plus, prouvé que

$$C = |f'(1/\sqrt{3})| = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} = \frac{2 \times 9}{\sqrt{3} \times 16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

On constate que $C > 0$ et que $C \leq \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (en utilisant le fait que $\sqrt{3} \leq \sqrt{4}$). On a donc bien $0 < C < 1$.

On pose $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1 + u_n^2}$.

10. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0; 1]$ ».
- Comme $u_0 = 0 \in [0; 1]$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$. D'après le tableau de variation de f , f est décroissante sur $[0; 1]$, ainsi $f(0) \geq f(u_n) \geq f(1)$. Dès lors, $1/2 \leq u_{n+1} \leq 1$. Par conséquent $u_{n+1} \in [0; 1]$. Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
 - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
11. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leq C^n$ ».
- Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = C^0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Comme f est C -lipschitzienne sur $[0; 1]$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha| \leq C \times C^n = C^{n+1}$$

Ceci démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, i.e., $|u_n - \alpha| \leq C^n$.

12. Comme $C \in]0; 1[$, $C^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par encadrement, il vient $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dès lors, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$.
13. D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq C^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On cherche donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $(3/4)^n \leq 10^{-3}$, par croissance du logarithme et de l'exponentielle, on a :

$$(3/4)^n \leq 10^{-3} \iff n(\ln(3) - \ln(4)) \leq -3\ln(10) \iff n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(4) - \ln(3)}$$

Ainsi, pour $n = E\left(\frac{3\ln(10)}{\ln(4) - \ln(3)}\right) + 1$, u_n est une approximation de α à 10^{-3} .

```

14. def f(x):
    return 1/(1+x*x)

E=1#majoration de l'erreur pour n=0
u=1#u_0
while E>10**(-3):
    u=f(u)#on calcule le terme d'après
    E=E*3/4#la majoration de l'erreur est une suite géométrique

#u est alors une approximation de alpha à 10^(-3) près

```

Dérivées successives

15. En tant que fonction polynomiale, $g: t \mapsto 1 + t^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ l'inverse de g (c'est-à-dire f), est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

16. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: «il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ ».

- En posant $P_0 = 1$ (polynôme constant), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = 1/(1+x^2)^1 = P_0(x)/(1+x^2)$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons donc $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)/(1+x^2)^{n+1}$. Dérivons alors $f^{(n)}$, comme quotient de deux fonctions dérivables (car polynomiale) :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R} \quad (f^{(n)})'(x) &= \frac{P'_n(x)(1+x^2)^{n+1} - (n+1)(2x)(1+x^2)^n P_n(x)}{((1+x^2)^{n+1})^2} \\
 f^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x)(1+x^2)^{n+1} - (n+1)(2x)(1+x^2)^n P_n(x)}{(1+x^2)^{2n+2}} \\
 &= \frac{P'_n(x)(1+x^2) - 2(n+1)x P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}
 \end{aligned}$$

Posons $P_{n+1} = P'_n(X) \times (1+X^2) - 2(n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}[X]$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}}{(1+x^2)^{n+2}}$. Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

17. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})^2$, alors $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

18. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f(x) = (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 1$. Or $g: x \mapsto 1+x^2$ et f sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer la formule de Leibniz, comme $gf = 1$, les dérivées successives de gf sont nulles, ainsi :

$$0 = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)}$$

Or $g^{(0)}: x \mapsto 1+x^2$, $g^{(1)}: x \mapsto 2x$, $g^{(2)}: \mapsto 2$ et pour tout $i \geq 3$, $g^{(i)}: x \mapsto 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = \underbrace{(1+x^2)f^{(n)}(x)}_{k=0} + \underbrace{n \times 2x \times f^{(n-1)}(x)}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times f^{(n-2)}(x)}_{k=2}$$

Or d'après la question 16, on connaît la forme des dérivées successives de f , ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x^2) \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1) \frac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}} = 0$$

En multipliant cette dernière égalité par $(1+x^2)^n$, on obtient l'égalité demandée.

19. D'après l'expression de f , f' et f'' , on sait que $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$, $P_2 = 6X^2 - 2$. De plus, en utilisant la relation trouvée à la question précédente, on sait que le polynôme $P_3 + 6XP_2 + 6(1 + X^2)P_1$ a une infinité de racines donc est le polynôme nul. Ainsi,

$$P_3 = -6XP_2 - 6(1 + X^2)P_1 = -6X(6X^2 - 2) - 6(1 + X^2) \times -2X = -24X^3 + 24X$$

20. $1 + X^2 = (X - i)(X + i)$ est un polynôme scindé à racines simples. Donc d'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\frac{1}{1 + X^2} = \frac{1}{(X - i)(X + i)} = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + i}$$

En multipliant par $X - i$ et en remplaçant X par i , il vient $a = \frac{1}{2i}$. Puis en multipliant par $X + i$ et en remplaçant X par $-i$, il vient $b = \frac{1}{-2i}$. Ainsi :

$$\frac{1}{1 + X^2} = \frac{1}{(X - i)(X + i)} = \frac{1}{2i(X - i)} + \frac{1}{-2i(X + i)}$$

21. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $f^{(0)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$
- $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{(x - i)^2} + \frac{1}{(x + i)^2} \right)$
- $f^{(2)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{(x - i)^3} - \frac{2}{(x + i)^3} \right)$
- $f^{(3)}(x) = \frac{1}{2i} \left(-\frac{6}{(x - i)^4} + \frac{6}{(x + i)^4} \right)$

Ainsi, on pose pour $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence ² $\mathcal{P}(n)$:

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x - i)^{n+1}} - \frac{1}{(x + i)^{n+1}} \right)$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors :

$$f^{(n)'} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{-(n+1)}{(x - i)^{n+2}} + \frac{n+1}{(x + i)^{n+2}} \right) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x - i)^{n+2}} - \frac{1}{(x + i)^{n+2}} \right)$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, en remettant au même dénominateur :

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2i} \frac{((x + i)^{n+1} - (x - i)^{n+1})}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{P_n(x)}{(x^2 + 1)^{n+1}}$$

Ainsi, P_n et $\frac{(-1)^n n!}{2i} ((X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1})$ sont deux polynômes qui prennent la même valeur en tout $x \in \mathbb{R}$ donc sont égaux ³. Ainsi, $P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i} ((X + i)^{n+1} - (X - i)^{n+1})$.

En déduire, un calcul de $f^{(n)}(x)$, puis une expression explicite de $P_n(x)$.

22. Remarquons alors que $z = i$ n'est pas racine de P_n . Fixons donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 & \iff (z + i)^{n+1} - (z - i)^{n+1} = 0 \\ & \iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^{n+1} = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{z + i}{z - i} = e^{i \frac{k2\pi}{n+1}} \\ & \iff \exists k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad z + i = (z - i) e^{i \frac{k2\pi}{n+1}} \\ & \iff \exists k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad z(1 - e^{i \frac{k2\pi}{n+1}}) = -i \left(e^{i \frac{k2\pi}{n+1}} + 1 \right) \end{aligned}$$

2. Cette conjecture vient du calcul des premières dérivées mais il n'est pas nécessaire de calculer ces dérivées sur votre copie, le faire au brouillon pour conjecturer l'hypothèse de récurrence suffit amplement.

3. Propriété qui vient du cours : la différence de ces deux polynômes a donc une infinité de racines donc est le polynôme nul.

Remarquons que $k = 0$ est impossible car conduirait à $0 = -2i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 & \iff \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z = \frac{-i \left(e^{i \frac{k2\pi}{n+1}} + 1 \right)}{1 - e^{i \frac{k2\pi}{n+1}}} \\ &= (-i) \frac{e^{i \frac{k\pi}{n+1}} \left(e^{-i \frac{k\pi}{n+1}} + e^{i \frac{k\pi}{n+1}} \right)}{e^{i \frac{k\pi}{n+1}} \left(e^{-i \frac{k\pi}{n+1}} - e^{i \frac{k\pi}{n+1}} \right)} \\ &= (-i) \frac{2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)}{-2i \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé que les racines de P_n sont de la forme $\cotan \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme la fonction $\cotan$ est strictement décroissante sur $]0; \pi[$, on en déduit que nous avons trouvé exactement n racines distinctes de P_n .

Une suite implicite

Soit un entier $n \geq 1$, on considère l'équation $(E_n)_n : f(x) = x^n$.

23. Comme $x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x^{n+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, par somme, $Q_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

24. Soit $x \in [0; +\infty[$. Remarquons que x est solution de (E_n) ssi $f(x) = x^n$ ssi $\frac{1}{1+x^2} = x^n$ ssi $1 = x^n + x^{n+2}$ ssi $x^{n+2} + x^n - 1 = 0$ ssi $Q_n(x) = 0$. Cherchons donc à montrer que Q_n s'annule une et une seule fois sur $[0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto Q_n(x)$ est continue sur $[0; 1]$. Or $Q_n(0) = -1 < 0 < 1 = Q_n(1)$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $v_n \in [0; 1]$ tel que $Q_n(v_n) = 0$. De plus, comme Q_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, un tel v_n est unique dans $\mathbb{R}_+$.

25. Le réel v_1 vérifie $x^3 + x - 1 = 0$. Par unicité de la solution de cette équation (voir question 6), $v_1 = \alpha$.

26. D'après la réponse à la question 24, $v_n \in [0; 1]$. De plus, $f(1) = \frac{1}{2} \neq 1^n$ et $f(0) = 1 \neq 0^n$. Ainsi, 0 et 1 ne sont pas solutions de (E_n) . Dès lors, $v_n \in]0; 1[$.

27. En utilisant le fait que $Q_n(v_n) = 0$, il en découle que :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(v_n) &= v_n^{n+3} + v_n^{n+1} - 1 = v_n (v_n^{n+2} + v_n^n) - 1 = v_n (v_n^{n+2} + v_n^n - 1 + 1) - 1 \\ &= v_n (Q_n(v_n) + 1) - 1 = v_n - 1 < 0 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $Q_{n+1}(v_n) < 0$.

28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question précédente, montre que

$$Q_{n+1}(v_n) < 0 = Q_{n+1}(v_{n+1})$$

Or Q_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi⁴ $v_n < v_{n+1}$. Ceci montre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

29. La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ étant croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_1 \leq v_n \leq 1$. Comme le passage à la limite conserve les inégalités larges, $0 < v_1 \leq \ell \leq 1$. Supposons $\ell < 1$. Alors, $v_n^n = \exp(n \ln(v_n))$. Par continuité du logarithme en $\ell > 0$,

$$\ln(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(\ell) < 0$$

Ainsi, $n \ln(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. En appliquant la fonction exponentielle, il en découle que $v_n^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En multipliant par v_n^2 , on obtient que $v_n^{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ainsi, par somme de limites :

$$0 = v_n^{n+2} + v_n^n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 0 - 1 = -1$$

Ce qui est absurde. Ainsi, $\ell = 1$. On a donc montré que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

4. Si on n'est pas convaincu, on suppose (par l'absurde) que $v_n \geq v_{n+1}$, par croissance de Q_{n+1} , on obtient $Q_{n+1}(v_n) \geq Q_{n+1}(v_{n+1})$ ce qui fournit bien une contradiction.