Problème 1 : soyez hyper bons avec les fonctions hyperboliques !

Étude d'une fonction

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

2. Comme $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{x})$, ainsi, $\quad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}$

   De même, $\mathrm{e}^{x} \underset{x\to-\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-x})$, ainsi, $\quad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$

3. $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$

4. On pose $u = \mathrm{sh}(x)$, alors :
   - $u \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,
   - $u^2 \underset{0}{=} x^2 + o(x^3)$
   - $u^3 \underset{0}{=} x^3 + o(x^3)$
   - Ainsi, $u^3 \underset{0}{\sim} x^3$, donc $o(u^3) \underset{0}{=} o(x^3)$.

   Ainsi, on effectue le $DL_3(0)$ de $\mathrm{sh}(u)$:

$$\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + \frac{u^3}{6} + o(u^3) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   Ainsi, $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(x)) - x \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et par imparité de sh,

$$f(-x) = (-x) \times \mathrm{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = (-x) \times (-1) \times \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

   Dès lors, la fonction f est paire.

6. Comme $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + o(u)$, $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{\sim} u$. On obtient alors $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Par produit d'équivalents, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De même[1], $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$.

7. Par croissance comparée : $x \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$. De plus, $x \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, par somme de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$. Comme f est paire, $f(x) \xrightarrow[x\to0^-]{} +\infty$, ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$.

8. La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, $x \mapsto \mathrm{sh}(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par produit f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

9. Notons $\mathrm{th}\colon u \mapsto \mathrm{sh}(u)/\mathrm{ch}(u)$, alors th est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{th}'(u) = \frac{\mathrm{ch}(u)^2 - \mathrm{sh}(u)^2}{\mathrm{ch}^2(u)} = 1 - \mathrm{th}^2(u)$$

   Proposons deux méthodes :

1. Comme f est paire, on aurait aussi pu dire que puisque f tend vers 1 en $+\infty$, nécessairement f tend vers 1 en $-\infty$.

- Posons, $g\colon u \mapsto u - \mathrm{th}(u)$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad g'(u) = 1 - \mathrm{th}'(u) = \mathrm{th}^2(u) \geqslant 0$$
De plus, $\mathrm{th}(u) = \mathrm{sh}(u)/\mathrm{ch}(u) = 0$ ssi $\mathrm{sh}(u) = 0$ ssi $u = 0$. Ainsi, pour tout $u > 0$, $g'(u) = \mathrm{th}^2(u) > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $u > 0$, $g(u) > g(0) = 0$, donc $u > \mathrm{th}(u)$.
- Soit $u \in \mathbb{R}^*$, th est continue sur $[\,0\,;u\,]$, dérivable sur $]\,0\,;u\,[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]\,0\,;u\,[$, tel que $\dfrac{\mathrm{th}(u)-\mathrm{th}(0)}{u-0} = \mathrm{th}'(c) < 1$, ainsi, $\mathrm{th}(u) < u$.

10. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et d'après ce qui précède, $\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \dfrac{1}{x} < 0$, par produit, $f'(x) < 0$, ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, comme f est paire, on en déduit également strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. $\mathrm{sh}(u) \underset{0}{=} u + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^5}{120} + \mathcal{O}(u^5)$, en divisant par u, on obtient :
$$\frac{\mathrm{sh}(u)}{u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} + \mathcal{O}(u^4)$$
12. Quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $u = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, ainsi par ce qui précède
$$f(x) = x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
On obtient ainsi le développement asymptotique avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1/6$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/120$.
13. On a :
$$f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^4)$$
Ceci montre, en particulier, que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ainsi, $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge alors par continuité en une application F avec $F(0) = 1$, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composée, de plus, par troncature d'un développement limité, $F(x) \underset{0}{=} F(0) + \mathcal{O}(x)$, ainsi F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Étude d'une suite

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$f(\mathbb{R}_+^*) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim_{x\to 0^+} f(x)\right[=]\,1\,;+\infty\,[$$
Or, $\dfrac{n+1}{n} \in\,]\,1\,;+\infty\,[$, ainsi, il existe $u_n \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$. Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, f est injective sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc nécessairement u_n est unique sur $\mathbb{R}_+^*$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $u_{n+1} \geqslant u_n$, supposons que $u_n > u_{n+1}$, alors comme f est strictement décroissante, $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $1 + \dfrac{1}{n} < 1 + \dfrac{1}{n+1}$, soit $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n+1}$, en passant à l'inverse, on obtient $n+1 < n$, soit $1 < 0$ ce qui est absurde, ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
16. Comme $(u_n)_n$ est croissante alors, d'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_n$ est majorée ou bien $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant M$, Notons alors que $M > 0$ (car, par exemple, $u_3 > 0$) comme f est décroissante, $f(u_n) \geqslant f(M)$, soit $\dfrac{n+1}{n} \geqslant f(M)$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on obtient que $f(M) \leqslant 1$, or $f(M) \in f(\mathbb{R}^*) =]\,1\,;+\infty\,[$ donc $f(M) > 1$ ce qui est absurde. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

17. En utilisant le résultat de la question 12, en tronquant à l'ordre 2, on obtient :

$$\frac{n+1}{n} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{6{u_n}^2} + o\left(\frac{1}{{u_n}^2}\right)$$

En retranchant 1 des deux côtés, on obtient

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6{u_n}^2} + o\left(\frac{1}{{u_n}^2}\right) \sim \frac{1}{6{u_n}^2}$$

Donc ${u_n}^2 \sim \frac{n}{6}$, comme les équivalents sont conservées par passage à une puissance et que $u_n > 0$, on obtient $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$.

Une équation différentielle

18. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\text{ch}(x)}{x}$. L'équation homogène est $y' + \frac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$. Appliquons la méthode de la variation de la constante et cherchons une solution particulière de la forme $y_p \colon x \mapsto C(x)/x$, avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad {y_p}'(x) + \frac{y_p(x)}{x} = \frac{(C'(x)x - C(x))}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x}$$

Ainsi, y_p est une solution particulière si et seulement si $C' = \text{ch}$. Par conséquent, $y_p \colon x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x} = F(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle $xy' + y = \text{ch}(x)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions sont donc exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + \frac{C}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

19. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$2\text{ch}(x)\text{sh}(x) = 2 \times \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \text{sh}(2x)$$

20. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ que nous noterons G, ainsi, pour $x > 0$, $J(x) = G(x) - G(x/2)$, dès lors, par composée et différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} J'(x) &= G'(x) - \frac{1}{2} \times G'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times f(x/2) = f(x) - \frac{x}{4} \times \text{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = f(x) - \frac{x}{4} \times 2\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

Problème 2 : soyez polis avec les polynômes !

1. - Si $n = 0$, alors $X^n = 1 = W \times 0 + 1$ et le reste de la division euclidienne de X^n par W est 1.
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, comme W n'est pas le polynôme nul :

   $$\exists!(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2 \qquad X^n = WQ + R \quad \text{et} \quad d^\circ R < d^\circ W = 2$$

   Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$, ainsi $X^n = X(X-4)Q + aX + b$, En remplaçant X par 0, on obtient [2] $0 = 0 \times Q(0) + a \times 0 + b$, ainsi $b = 0$. En remplaçant X par 4, on obtient $4^n = 4(4-4)Q(4) + 4a + b$, ainsi, $a = 4^{n-1}$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de X^n par W est $R = 4^{n-1}X$.

2. Attention, si $P = X^n$ avec $n = 0$, alors $P(0) = 1$ et non $P(0) = 0$. C'est pour cela que nous avons dû traiter le cas $n = 0$ à part.

2. $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$ et $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. • $E \subset \mathbb{R}_4[X]$
   • Si $P = 0$, alors $P(0) = P(4) = 0$, donc le polynôme nul $0 \in E$.
   • Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0$, dès lors, $\lambda P + Q \in E$.

   En conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, alors :

$$\begin{aligned}
P \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad P(0) = P(4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X-0)(X-4)|P \quad \Longleftrightarrow \quad W|P \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = QW \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (aX^2 + bX + c)W \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = aX^2W + bXW + cW \\
&\Longleftrightarrow \quad P \in \text{vect}(X^2W, XW, W) = \text{vect}(X^3(X-4), X^2(X-4), X(X-4))
\end{aligned}$$

   Posons $\mathscr{B} = (X^3(X-4), X^2(X-4), X(X-4))$ On a donc montré que $E = \text{vect}(\mathscr{B})$, ainsi $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E. En outre, comme $\mathscr{B}$ est constituée de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, $\mathscr{B}$ est une famille libre. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de E. Ceci montre, en particulier, que $\dim(E) = |\mathscr{B}| = 3$.
5. Soit $P \in E \cap \mathbb{R}_1[X]$, alors $P(0) = P(4) = 0$, ainsi P au au moins deux racines et $d^\circ P \leqslant 1$, comme un polynôme non nul a un nombre de racines inférieur ou égale à son dégré, on en déduit que $P = 0$, ainsi $E \oplus \mathbb{R}_1[X]$. De plus, $\dim(E) + \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 3 + 2 = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, on en déduit que E et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires.
6. Si $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $WQ \in \mathbb{R}_5[X]$ et $(WQ)(0) = (WQ)(4) = 0$, ainsi $WQ \in E$, ainsi $\varphi \colon \mathbb{R}_2[X] \to E$.

   Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda P + Q) = W \times (\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

   • Soit $Q \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(Q) = WQ = 0$, comme $W \neq 0$, $Q = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vrai, on en déduit que φ est injective.
   • Soit $P \in E$, alors, $W|P$ et donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QW$, ainsi $d^\circ Q + d^\circ W = d^\circ P \leqslant 4$, on en déduit que $d^\circ Q \leqslant 2$, ainsi $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P = \varphi(Q)$. Ceci montre que φ est surjective.

   Ainsi, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers E.
7. • $\Delta(1) = 1 - 1 = 0$
   • $\Delta(X) = (X + 1) - X = 1$
   • $\Delta(X^2) = (x + 1)^2 - X^2 = 2X + 1$
8. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$d^\circ P(X+1) = d^\circ P \times d^\circ(X+1) = d^\circ P \leqslant 2$$

   Dès lors, $d^\circ \Delta(P) \leqslant \max(d^\circ P(X+1), d^\circ P) \leqslant \max(2, 2) = 2$. Dès lors, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q) = \lambda(P(X+1) - P) + Q(x+1) - Q = \lambda\Delta(P) - \Delta(Q)$$

   Ainsi, Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $Q = aX^2 + bX + c$, et donc par linéarité de Δ, $\Delta(Q) = a\Delta(X^2) + b\Delta(X) + c\Delta(1) = a(2X + 1) + b$. Distinguons donc les cas :
   • Si $d^\circ Q = 2$, alors $a \neq 0$ et $d^\circ \Delta(Q) = 1$.
   • Si $d^\circ Q = 1$, alors $a = 0$ et $b \neq 0$, donc $d^\circ \Delta(Q) = 0$.
   • Si $d^\circ Q = 0$, alors $a = b = 0$ et $c \neq$, $\Delta(Q) = 0$, donc $d^\circ \delta(Q) = -\infty$.
   • Si $d^\circ Q = -\infty$, alors $a = b = c = 0$, $\Delta(Q) = 0$ et $d^\circ \Delta(Q) = -\infty$.
10. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors :

$$\begin{aligned}
Q \in \text{Ker}(\Delta) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta(Q) = 0 \quad a(2X+1) + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(2a) + a + b = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2a = a + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q = c \quad \Longleftrightarrow \quad Q \in \mathbb{R}_0[X]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ et ainsi (1) est une base de $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\Delta) &= \{\Delta(Q) \mid Q \in \mathbb{R}_2[X]\} = \{\Delta(aX^2 + bX + c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(2X+1) + b \times 1 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(2X+1, 1)\end{aligned}$$

Ainsi, $(2X+1, 1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\Delta)$, comme il s'agit d'une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, $(2X+1,1)$ est une base [3] de $\mathrm{Im}(\Delta)$.

11. On remarque que $1 \in \mathrm{Ker}(\Delta) \cap \mathrm{Im}(\Delta)$, ainsi $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$ ne sont pas en somme directe donc ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
12. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$:
    - $\Delta(Q) = a(2X+1) + b = 2aX + (a+b) \times 1$
    - Par linéarité de Δ, $\Delta(\Delta(Q)) = 2a\Delta(X) + (a+b)\Delta(1) = 2a + 0 = 2a \times 1$
    - Par linéarité de Δ, $\Delta(\Delta(\Delta(Q))) = 2a\Delta(1) = 0$

    Ainsi, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) = 0$, ainsi $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$
13. En utilisant le fait que $\Delta^3 = 0$, on obtient :

$$f^3 = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (\Delta \circ \Delta \circ \Delta) \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ 0 \circ \varphi = 0$$

14. Soit $P \in E[X]$:

$$\begin{aligned}P \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(P) = 0 \iff \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1}(P) = 0 \\ &\iff \varphi^{-1}(\varphi(\Delta(\varphi^{-1}(P))) = \varphi^{-1}(0) \iff \Delta(\varphi^{-1}(P)) = 0 \\ &\iff \varphi^{-1}(P) \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] \iff \exists a_0 \in \mathbb{R} \quad \varphi^{-1}(P) = a_0 \\ &\iff \exists a_0 \in \mathbb{R} \quad P = \varphi(a_0) = a_0 W \iff P \in \mathrm{vect}(W)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(W)$, dès lors (W) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme, (W) est une famille avec un seul vecteur non nul, (W) est libre. Ainsi, (W) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{f(P) \mid P \in E\} = \{f(aX^2W + bXW + cW) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{af(X^2W) + bf(XW) + cf(W) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{vect}(f(X^2W), f(XW), f(W))\end{aligned}$$

Or [4] :
- $f(W) = \varphi(\Delta(\varphi^{-1}(W))) = \varphi(\Delta(1)) = 0$
- $f(XW) = \varphi(\Delta(\varphi^{-1}(XW))) = \varphi(\Delta(X)) = \varphi(1) = W$
- $f(X^2W) = \varphi(\Delta(\varphi^{-1}(X^2W))) = \varphi(\Delta(X^2)) = \varphi(2X+1) = (2X+1)W$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}((2X+1)W, W, 0) = \mathrm{vect}((2X+1)W, W)$. Ceci démontre que $((2X+1)W, W)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme cette famille contient des polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, c'est une famille libre et donc $((2X+1)W, W)$ est une base [5] de $\mathrm{Im}(f)$.

3. $(1, X)$ était aussi une base possible et même plus «sympa».
4. On aurait pu directement utiliser le fait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(X^2W), f(XW), f(W))$ car c'est dans le cours mais ce n'était pas au programme de ce devoir.
5. On aurait pu montrer que (XW, W) est aussi une base plus «sympa».