DS6

25 mars 2023

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non-justifiés ne seront pas pris en compte.

Problème 1 : soyez hyper bons avec les fonctions hyperboliques !

Dans ce problème, on note ch la fonction cosinus hyperbolique, sh la fonction sinus hyperbolique.

Étude d'une fonction

1. Rappeler la définition de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner un équivalent de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis quand $x \rightarrow -\infty$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, rappeler de $DL_{2n}(0)$ de ch et le $DL_{2n+1}(0)$ de sh à l'aide du symbole Σ .
4. Calculer le $DL_3(0)$ de $\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(x))$, en déduire un équivalent de $\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(x)) - x$ en 0.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. Étudier la parité de f .
6. Rappeler un équivalent de $\operatorname{sh}(u)$ en 0 puis en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Déterminer la limite de f en 0.
8. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x} \right] \times \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

9. Montrer que pour tout $u > 0$, $\frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} < u$.
10. En déduire le tableau de variation de f .
11. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $u \mapsto \frac{\operatorname{sh}(u)}{u}$.
12. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont cinq réels que l'on précisera.

13. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction continue notée F , puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étude d'une suite

14. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n .

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

15. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

16. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

17. Grâce à la question 12, déterminer un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Une équation différentielle

18. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy' + y = \operatorname{ch}(x)$.

Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$.

19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$.

20. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$J'(x) = f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

Problème 2 : soyez polis avec les polynômes !

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égale à k . On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par W .
2. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$ ainsi que sa base canonique.
3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
4. Déterminer une base de E , en déduire que $\dim(E) = 3$.
5. Démontrer que E et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\varphi(Q) = WQ$.

6. Montrer que l'application $\varphi: Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E .

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on considère $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors $\Delta(Q) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 5) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2$

7. Calculer $\Delta(1)$, $\Delta(X)$ et $\Delta(X^2)$.
8. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Déterminer, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q .
10. Déterminer une base $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et une base de $\operatorname{Im}(\Delta)$.
11. $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et $\operatorname{Im}(\Delta)$ sont-ils des espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$?
12. Démontrer que $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant $f = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1}$, où φ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application φ .

13. Montrer que $f^3 = 0$
14. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base $\operatorname{Im}(f)$.