Exercice 1 : Soyez deter sur les ... (ok elle est nulle, j'assume pas)

1. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \Delta_{i,j}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $d^\circ u(P) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ P') \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ P - 1) \leqslant 3$. Ainsi, $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$u(\lambda P + Q) = \lambda P + Q + (\lambda P + Q)' = \lambda(P + P') + (Q + Q') = \lambda u(P) + u(Q)$$

Ainsi, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, alors
- $u(1) = 1 = 1 1 + 0 X + 0 X^2 + 0 X^3$,
- $u(X) = X + 1 = 1 1 + 1 X + 0 X^2 + 0 X^3$
- $u(X^2) = X^2 + 2X = 0 1 + 2 X + 1 X^2 + 0 X^3$
- $u(X^3) = X^3 + 3X^2 = 0 1 + 0 X + 3 X^2 + 1 X^3$

Ainsi :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det(u) = \det(A) = 1$ (déterminant d'une matrice triangulaire). Ainsi, comme $\det(u) \neq 0$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$, alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 64 \\ 6 & 4 & -16 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 60 \\ 2 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 60 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} = 220$$

Ainsi, comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$, on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Par linéarité par rapport à chacune des colonnes, $D_n = x^n \Delta_n$, où $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On développe Δ_{n+2} suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & (0) & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+2} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & (0) & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & (0) & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \end{aligned}$$

Pour le premier déterminant de taille $n+1$, on reconnaît exactement Δ_{n+1}, pour le second, en développant suivant la première colonne, on obtient Δ_n. Ainsi, $\Delta_{n+2} = \Delta_{n-1} - \Delta_n$. On reconnaît alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 = r - 1$, $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ étant solution de cette équation caractéristique. Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\Delta_n = A\cos(n\pi/3) + B\sin(n\pi/3)$. En outre, $\Delta_1 = |1| = 1$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ainsi $\left\{\begin{array}{rcl} A/2 + B\sqrt{3}/2 & = & 1 \\ -A/2 + B\sqrt{3}/2 & = & 0 \end{array}\right.$. En sommant/soustrayant ces deux égalités : $\left\{\begin{array}{rcl} B\sqrt{3} & = & 1 \\ A & = & 1 \end{array}\right.$. Ainsi, $\Delta_n = \cos(n\pi/3) + \sin(n\pi/3)/\sqrt{3}$. En conclusion, pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $D_n = x^n\cos(n\pi/3) + x^n\sin(n\pi/3)/\sqrt{3}$.

Exercice 2 : Un exercice récurrent et fixe

On pose pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et $f(0) = 1$.

1. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) - 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)}$. On pose alors $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$
   - $u^2 = \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$
   - $o(u^2) = o(x^2)$ car $u^2 \sim \dfrac{x^2}{4}$.

   Ainsi, $f(x) = \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$
2. La fonction f admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1/2$. La tangente de f en 0 est $x \mapsto 1 - \dfrac{x}{2}$, de plus, $f(x) - (1 - \dfrac{x}{2}) \sim \dfrac{x^2}{12} > 0$, ainsi, f est au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.
3. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, ainsi f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$. De plus, pour tout $x > 0$:
$$f'(x) = \frac{1(\mathrm{e}^x - 1) - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$
4. Posons $g\colon x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par sommet et produit de fonctions qui le sont. De plus, $g'\colon x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$ Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
5. Comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x > 0$, $g(x) < g(0) = 0$, ainsi f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus, f est dérivable en 0, ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

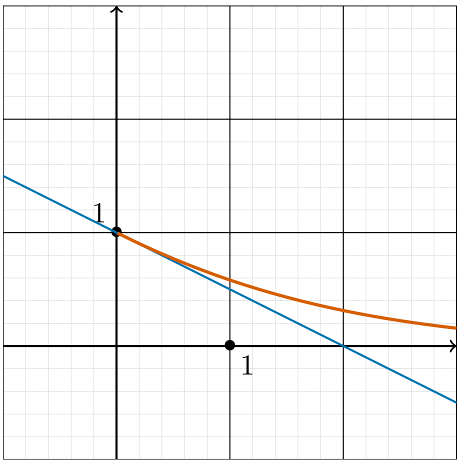

Figure 1 – Graphe de la fonction f.

6. Montrons que f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[\,0\,;+\infty\,[$. La fonction f' est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient de fonctions qui le sont et pour tout $x > 0$
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^2(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^4} = \frac{-(\mathrm{e}^x - 1)x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}(x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2) \end{aligned}$$

On pose alors $h\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2$, par sommes et produit de fonctions deux fois dérivables, h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$, et $h''\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$, ainsi, h' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi pour tout $x > 0$, $h'(x) > h'(0) = 0$. Ceci prouve que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc pour tout $x > 0$, $h(x) > h(0) = 0$. Ceci prouve que $f''(x) < 0$ pour tout $x > 0$, ainsi f' est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$. De plus, $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$, ainsi, d'après le théorème de la limite monotone et la stricte croissance de f', pour tout $x \geqslant 0$, $-1/2 = f'(0) \leqslant f'(x) < 0$. En outre, la fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, ainsi, tout $x > 0$, $|f'(x)| \leqslant 1/2$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est 1/2-lipschitzienne. De plus, $f(\ln 2) = \ln(2)$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ln(2)| = |f(u_n) - f(\ln(2))| \leqslant \frac{|u_n - \ln(2)|}{2}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln(2)| \leqslant |u_0 - \ln(2)|2^{-n}$, par encadrement, cela démontre que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2)$.

Problème : Les polynômes du beau-fils

1. L'équation différentielle $(x^2-1)f'(x)+2xf(x) = 0$ sur $]\,-1\,;1\,[$ est équivalente à $f'(x)+\dfrac{2x}{x^2-1}f(x) = 0$. Si on note $a\colon x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$, alors $A\colon x \mapsto \ln(|x^2-1|) = \ln(1-x^2)$ est une primitive de A sur $]\,-1\,;1\,[$. Ainsi les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto C\exp(-\ln(1-x^2)) = \dfrac{C}{1-x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est $\operatorname{vect}(x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2})$.
2.
```python
def Un(n,x):
        return (x**2-1)**n
```
3.
   - $U_0 = 1$, ${U_0}^{(0)} = 1$, $L_0 = \dfrac{1}{1}1 = 1$
   - $U_1 = X^2 - 1$, ${U_1}' = 2X$ et $L_1 = \dfrac{1}{2}(X^2-1)' = X$
   - $U_2 = X^4 - 2X^2 - 1$, ${U_2}' = 4X^3 - 4X$, ${U_2}'' = 12X^2 - 4$ et $L_2 = \dfrac{1}{8}(12X^2-4) = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$
4. Notons $Q = X^2-1$ et $R = X^n$, alors $U_n = R\circ Q$. D'après le degré d'une composée, $d^\circ U_n = d^\circ Q \times d^\circ R = 2n$.
5. Le polynôme U_n est de degré $2n$. Ainsi, pour tout $k \in [\![\,0\,;2n\,]\!]$, $d^\circ {U_n}^{(k)} = 2n-k$. En particulier, $d^\circ {U_n}^{(n)} = 2n-n$. De plus, en développant, par la formule du binôme de Newton, $U_n = X^{2n} + R$ où $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, ainsi ${U_n}^{(n)} = (X^{2n})^{(n)} + R^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}X^n + R^{(n)}$. Avec, $d^\circ R^{(n)} \leqslant 2n-1-n$. Ainsi, en divisant par $2^n n!$, $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$
6. Comme pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $d^\circ L_i = i$. La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre. De plus, cette famille contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, ainsi $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Comme $U_n = ((X-1)(X+1))^n = (X-1)^n(X+1)^n$, ainsi U_n a deux racines 1 et -1 toutes deux de multiplicité 1.
8. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
9. ${U_n}' = n2X(X^2-1)^{n-1} = 2nX(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}$.
10. Soit $f\colon\ [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose que $f(a) = f(b)$, f continue sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;b\,[$. Alors, il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.
11. Comme $k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$, par hypothèse 1 et -1 sont racine de $U_n^{(k)}$de multiplicité $n-k \geqslant 1$. Ainsi, par dérivation, 1 et -1 seront encore racine de $U_n^{(k+1)}$ mais de multiplicité $n-k-1$. De plus, si on note $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$, alors $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$. Fixons $i \in [\![\,0\,;k\,]\!]$. La fonction $x \mapsto U_n^{(k)}$

est continue sur $[\,\alpha_i\,;\alpha_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,\alpha_i\,;\alpha_{i+1}\,[$ et $U_n^{(k)}(\alpha_i) = 0 = U_n^{(k)}(\alpha_{i+1})$. En appliquant le théorème de Rolle, il existe $\beta_{i+1} \in \,]\,\alpha_i\,;\alpha_{i+1}\,[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_{i+1}) = 0$. De plus,

$$\alpha_0 = -1 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 \ldots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1$$

Or $= 2n - k - 1$ et on a trouvé $k+1$ racines de $U_n^{(k+1)}$ de multiplicité au moins 1, ainsi que deux racines (1 et -1) de multiplicité $n-k-1$. Or $k+1+(n-k-1)+(n-k-1) = 2n-k-1 = d^\circ U_n^{(k+1)}$. Le polynôme est ainsi scindé dans $\mathbb{R}$, en notant ν son coefficient dominant, on a donc

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

12. Pour $n = 1$, $L_1 = X$ admet bien 1 racine simple dans $[\,-1\,;1\,]$. Fixons $n \geqslant 2$. On raisonne par récurrence finie sur $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$ avec l'hypothèse $\mathscr{P}(k)$: « il existe des réels $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ dans $]\,-1\,;1\,[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)(X-1)^{n-k}$$

»
- Pour $k = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie, d'après la question 9, il suffit, en effet, de poser $\alpha_1 = 0$ et $\mu = 2n$.
- Soit $k \in [\![\,1\,;n-1\,]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, alors d'après la question 11, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Ainsi, par récurrence finie, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. En particulier, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ des réels dans $]\,-1\,;1\,[$ tels que

$$U_n^{(n)} = \mu(X+1)^0(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)(X-1)^0 = \mu(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$$

En divisant par $2^n n!$, L_n admet ainsi n racines réelles simples toutes dans $[\,-1\,;1\,]$ (et même dans $]\,-1\,;1\,[$).

13. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + 2X(\lambda P+Q)' = (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 2X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda((X^2-1)P'' + 2XP') + (X^2-1)Q'' + 2XQ' = \lambda\phi(P) + \phi(Q)\end{aligned}$$

De plus, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

14. Soit $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$:
- Si $k = 0$, alors $\phi(1) = (X^2-1)1'' + 2X1' = 0$
- Si $k = 1$, alors $\phi(X) = (X^2-1)X'' + 2X(X') = 2X$
- Si $k \geqslant 2$, alors $\phi(X) = (X^2-1)(k(k-1)X^{k-2}) + 2X \times (kX^{k-1}) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$

15. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- $d^\circ P' \leqslant d^\circ P - 1 \leqslant n-1$, par produit $d^\circ XP' \leqslant n$.
- $d^\circ P'' \leqslant d^\circ P - 2 \leqslant n-2$, par produit, $d^\circ(X^2-1)P'' \leqslant 2 + d^\circ P'' \leqslant n$

Ainsi, d'après la majoration du degré de la somme de deux polynômes,

$$d^\circ\phi(P) \leqslant \max(d^\circ(X^2-1)P'', d^\circ 2XP) \leqslant \max(n, n)$$

Ceci prouve que $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

16. Notons, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Comme $\phi(1) = 0$, la première colonne de M est nulle, pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $m_{i,0} = 0$, en particulier $m_{0,0} = 0(0+1)$.
- $\phi(X) = 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2 + \ldots$, ainsi, $m_{0,1} = 0$, $m_{1,1} = 2 = 1(1+1)$, et pour tout $i \in [\![\,2\,;n\,]\!]$, $m_{i,1} = 0$.
- Soit $j \in [\![\,2\,;n\,]\!]$, $\phi(X^j) = j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2} = \sum\limits_{i=0}^{n} m_{i,j}X^i$ avec $m_{j,j} = j(j+1)$, $m_{j-2,j} = -j(j-1)$ et $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!] \backslash \{j; j-2\}$,.

Ceci démontre que M est une matrice triangulaire supérieure et que pour tout $j \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $m_{j,j} = j(j+1)$.

17. ```python
def Matrice(n):
    M=[[0 for j in range(n+1)] for i in range(n+1)]
    for j in range(n+1):#tous les termes diagonale
        M[j][j]=j*(j+1)
    for j in range(2,n+1):#tous les termes de la colonne 2 jusqu'à colonne n
        M[j-2][j]=-j*(j-1)
    return M
```

18. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$, comme $P$ est une matrice triangulaire supérieure, $\det P = 1 \times 1 \times \frac{3}{2} \neq 0$. Ainsi, $P$ est inversible. De plus,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{2}{3} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

19. Notons $C_1$, $C_2$ et $C_3$ les trois colonnes de $M$, comme $C_1$ est la colonne nulle $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_2, C_3)$. Or $C_2$ et $C_3$ sont deux colonnes non colinéaires, ainsi $(C_2, C_3)$ est une famille libre, ainsi, $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_2, C_3) = 2$. De plus, $\text{Im}(M) = \text{vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{vect}(C_2, C_3)$. Ainsi, $(C_2, C_3) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(M)$. D'après le théorème du rang matriciel $3 = \dim(\text{Ker}(M)) + \text{rg}(M)$, ainsi $\dim(\text{Ker}(M)) = 1$ De plus $C_1 = 0 = 0C_2 + 0C_3$, ainsi $1C_1 + 0C_2 + 0C_3 = 0$. Dès lors, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M)$, comme il s'agit d'un seul vecteur non nul dans un espace de dimension 1, $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(M)$.

20. D'après le cours, on peut en déduire que $\text{rg}(\phi_2) = 2$, $(1)$ est une base de $\text{Ker}(\phi_2)$ et $(2X, 6X^2 - 2)$ est une base de $\text{Im}(\phi_2)$

21. 
   - $\phi(L_0) = \phi(1) = 0 = 0L_0 + 0L_1 + 0L_2$
   - $\phi(L_1) = \phi(X) = 2X = 0L_0 + 2L_1 + 0L_2$
   - $\phi(L_2) = \phi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \frac{3}{2}\phi(X^2) - \frac{1}{2}\phi(1) = \frac{3}{2}(6X^2 - 2) = 6X^2 - 3 = 6L_2 = 0L_0 + 0L_1 + 6L_2$

   Ainsi, $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

22. Notons $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi_2)$, comme $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_2)$ avec $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, d'après la formule de changement de base $M = PDP^{-1}$, avec $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$
```

23. Soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}M^p &= PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2^p & 0\\ 0 & 0 & 6^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2^p & 0\\ 0 & 0 & 6^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\times 6^p\\ 0 & 3\times 2^{p+1} & 0\\ 0 & 0 & 6^{p+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\times 6^{p-1}\\ 0 & 2^p & 0\\ 0 & 0 & 6^p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si $p=0$, $M^p = I_3$

24. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\phi_2) \cap \operatorname{Im}(\phi_2)$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a \times 1$, il existe $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = b2X + c(6X^2-2)$, ainsi $6cX^2+2bX+(-2c-a) = 0$. Par unicité de la décomposition d'un polynôme, on en déduit que $6c = 2b = (-2c-a) = 0$, ainsi $c = b = a = 0$, dès lors $P = 0$, ainsi $\operatorname{Ker}(\phi) \cap \operatorname{Im}(\phi) \subset \{0\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vrai, on en déduit que $\operatorname{Ker}(\phi_2)$ et $\operatorname{Im}(\phi_2)$ sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(\phi)) + \dim(\operatorname{Im}(\phi_2)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(\phi_2)$ et $\operatorname{Im}(\phi_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

25. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$, si $k=0$, alors $U_0 = 1$, $U_0{}' = 0$ et $(X^2-1)0 - 2\times 0\times U_0 = 0$. Si $k \geqslant 1$, alors $U_k{}' = 2kX(X^2-1)^{n-1}$, ainsi

$$(X^2-1)U_k{}' - 2kXU_k = 2kX(X^2-1)^n - 2kX(X^2-1)^n = 0$$

26. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}$$

27. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Dérivons $k+1$ la relation précédente : $((X^2-1)U_k')^{(k+1)} - 2k(XU_k)^{(k+1)} = 0$ En appliquant la formule de Leibniz il vient :

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(X^2-1)^{(i)}U_k'^{k+1-i} - 2k\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(X)^{(i)}U_k{}^{k+1-i} = 0$$

Or, $(X^2-1)^{(i)} = 0$, dès que $i \geqslant 3$ et $X^{(i)} = 0$ dès que $i \geqslant 2$. Ainsi,

$$\binom{k+1}{0}(X^2-1)U_k{}^{(k+2)} + \binom{k+1}{1}2XU_k{}^{(k+1)} + \binom{k+1}{2}2U_k{}^{(k)} - 2k\left(\binom{k+1}{0}XU_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}U_k^{(k)}\right) = 0$$

Soit :

$$(X^2-1)U_k{}^{(k+2)} + (k+1)2XU_k{}^{(k+1)} + (k+1)kU_k{}^{(k)} - 2k\left(XU_k^{(k+1)} + (k+1)U_k^{(k)}\right)$$

En rassemblant les termes suivant l'ordre des dérivées de U_k, on obtient :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$$

28. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$, en utilisant la linéarité de ϕ

$$\begin{aligned}\phi(L_k) &= \phi\left(\frac{1}{2^kk!}U_k^{(k)}\right) = \frac{1}{2^kk!}\phi(U_k^{(k)}) = \frac{1}{2^kk!}\left((X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2^kk!}\left(k(k+1)U_k^{(k)}\right) = k(k+1)L_k\end{aligned}$$

29. Notons $\mathscr{B}' = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$, alors pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\phi_n(L_k) = k(k+1)L_k = \sum_{i=0}^{k-1} 0\times L_i + k(k+1)L_k + \sum_{i=k+1}^{n} 0\times L_i$$

Ainsi, si on note $D = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi_n) = (d_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, on sait que $d_{k,k} = k(k+1)$ et pour tout $i \neq k$, $d_{i,k} = 0$, ainsi D est une matrice diagonale, à le k-ième coefficient de D est $k(k+1)$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$

30. En notant $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}' = (L_0, L_1, \dots, L_n)$, on obtient $M = PDP^{-1}$, M est alors semblable à la matrice diagonale D.
31. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors, en reconnaissant le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned}\det(x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \phi_n) &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \phi_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_n)) \\ &= \begin{vmatrix} x-0 & 0 & 2 & 0 & \dots\ 0 \\ 0 & x-2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & x-n(n+1) \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n}(x - i(i+1))\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction est polynomiale de degré $n+1$ et dont $i(i+1)$ est racine pour $i \in [\![0\,;n]\!]$ (racines toutes simples).
32. Proposons deux méthodes :
    - Soit $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors $\phi(P) = 0$, alors $x \mapsto P(x)$ est solution de l'équation différentielle de la question 1 sur $]-1\,;1[$, ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$, $P'(x) = \dfrac{C}{1-x^2}$, ainsi si $C > 0$, $P'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$, et si $C < 0$, $P'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$, or P' est continue en 1 donc $P'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} P'(1) \in \mathbb{R}$. Ainsi, nécessairement $C = 0$, ainsi P' est nulle sur $]-1\,;1[$, alors P' a une infinité de racines, donc $P' = 0$ (égalité entre polynômes), ainsi P est un polynôme constant. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. On peut en conclure que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$.
    - Soit $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors en notant, $n = d^\circ P$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P \in \mathrm{Ker}(\phi_n)$. De plus,

    $$\mathrm{Im}(\phi_n) = \mathrm{vect}(\phi_n(1), \phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n)) = \mathrm{vect}(0, \phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n)) = \mathrm{vect}(\phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n))$$

    Or, comme pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $d^\circ \phi_n(X^i) = i$, on peut en conclure que $(\phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n))$ est une famille libre (famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts), ainsi cette famille est une base de $\mathrm{Im}(\phi_n)$. Donc $\mathrm{rg}(\phi_n) = n$. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\phi_n)$ est de dimension 1. Or $1 \in \mathrm{Ker}(\phi_n)$, dès lors, $P \in \mathrm{vect}(1) = \mathrm{Ker}(\phi_n)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'autre inclusion étant vraie. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{vect}(1)$.
33. Supposons ϕ surjective, ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 = \phi(P)$. Notons $n = d^\circ P$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $1 = \phi_n(P) \in \mathrm{Im}(\phi_n)$. Or, d'après notre réponse à la question précédente,

$$1 \in \mathrm{Im}(\phi_n) = \mathrm{vect}(\phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n))$$

ainsi la famille $(1, \phi_n(X), \dots, \phi_n(X^n))$ est liée Cependant, cette famille est constituée de polynômes dont les degrés sont deux à deux distincts. Ceci est absurde. Ainsi, ϕ n'est pas surjective.