CB

16 mai 2023

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non-justifiés ne seront pas pris en compte.

Problème cyclique mais sans vélo : ne perdez donc pas les pédales !

Présentation générale

Dans ce problème, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad f^1 = f \qquad f^2 = f \circ f \qquad f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.
Ce problème est composé de cinq parties largement indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans les deux dernières parties, on détermine des conditions pour que certains endomorphismes soient cycliques.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, déterminer A, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
4. On pose $a = (1, 1)$ et $b = (2, 1)$, démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (a, b)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer D, la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
5. Donner une relation entre A et D et calculer explicitement A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
6. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme g l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

7. Complétez la définition de g: $\begin{cases} & \longrightarrow \\ & \longmapsto \end{cases}$
8. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
9. L'endomorphisme g est-il cyclique ?
10. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(M - 2I_3)$ et de $\mathrm{Ker}(M + I_3)$.
    On conseille d'appliquer une méthode sans calcul.
11. À l'aide d'un déterminant, démontrer que la concaténation des deux bases est une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathscr{B}'$.
12. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X + 1)^2 - X^2 = 2X + 1$

13. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
14. Soit $k \in [\![0 \,; n]\!]$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.
15. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $d^\circ(\Delta(P)) = d^\circ P - 1$
16. Démontrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{C}$ et :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \cdots & \cdots & \gamma_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_1^{n-1} & \gamma_2^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

17. Montrer que s'il existe un couple $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors $\det(V_\gamma) = 0$.

On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice ${V_\gamma}^T$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$.

18. En utilisant le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1}$, montrer que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

    Que peut-on en déduire pour $\det(V_\gamma)$? **On ne calculera pas** $\det(V_\gamma)$.

On considère maintenant un endomorphisme h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que h est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E et $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $h(v_i) = d_i v_i$. En particulier, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$ est diagonale avec comme coefficients diagonaux les d_i. Remarquons que les endomorphismes f et g des deux premières parties sont diagonalisables. Soit $v \in E$, comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

19. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 {d_1}^p v_1 + \ldots + \alpha_n {d_n}^p v_n$$

20. Montrer que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = (v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \det(V_d)$$

21. Conclure que h est cyclique si et seulement si les d_i sont deux à deux distincts.
22. Ce résultat est-il cohérent avec les résultats des deux premières parties ?

Partie V - Cas d'un endomorphisme nilpotent

On considère maintenant un endomorphisme nilpotent h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que h est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h^p = 0$. De plus, on dit que h est nilpotent d'indice p si $h^{p-1} \neq 0$ et $h^p = 0$.

23. Démontrer que $p \leqslant n$.
24. Déterminer, en fonction de p, si h est cyclique ou non.
25. Justifier que Δ est nilpotent. Le résultat de la question 24 est-il cohérent avec le résultat de la partie III ?

Problème d'analyse : plus de blague maintenant, vous avez passé l'âge !

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$.

Généralités

1. Prouver que f et g sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $t > 0$, $tf'(t) = g(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement sera encore noté g. Montrer que g est dérivable en 0.
3. Faire un tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+$, et tracer g (sachant que $e^{-1} \simeq 0,36$).
4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1. Calculer H.
5. Calculer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de H.

Soit un entier $n \geqslant 3$. On introduit l'équation (E_n) : $f(t) = \dfrac{t}{n}$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

6. Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]\,0\,;1\,[$ que l'on notera α_n.
7. Écrire une fonction Python `alpha(n,epsilon)`, qui à un entier $n \geqslant 3$ renvoie une approximation de α_n à ε près.
   On pourra utiliser la commande `np.exp(x)` qui renvoie e^x *(si `numpy` est chargé avec l'alias `np`).*
8. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est monotone.
9. Montrer alors que $(\alpha_n)_n$ converge. Est-il possible que (α_n) converge vers une limite $\ell > 0$? Conclure sur la limite de $(\alpha_n)_n$.

Étude d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$.

Soit y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que y est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. **Sans chercher à calculer explicitement** y**,** nous allons alors déterminer $u_n = y^{(n)}(0)$.

10. Que vaut $u_0 = y(0)$? En dérivant (E), calculer u_1 et u_2.
11. Soit un entier $n \geqslant 3$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
    $$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$
    On pourra dériver n fois l'équation (E) avec la formule de Leibniz.
    En déduire une relation entre u_n et u_{n-1}.
12. Trouver une expression de u_n utilisant une factorielle valable pour tout $n \geqslant 2$. En déduire les développements limités de y à tout ordre au voisinage de 0 (on justifiera l'existence de tels développements limités).

Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$, en posant $f(0) = 0$, f est ainsi continue sur $\mathbb{R}_+$.

13. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$ à l'aide de l'application $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (primitive de f).
14. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1 reste valable pour $t = 0$.
15. Pour $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra effectuer une intégration par parties).
16. En coupant l'intégrale par Chasles en 1, montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C + \ln(x)$.
17. En déduire que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{=} o(x)$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.