Un problème cyclique (exo 1 CCINP PC2023)

1. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y)+(x',y')) &= f(\lambda x+x',\lambda y+y') = (4(\lambda x+x')-(2\lambda y+y'),\lambda x+x'+\lambda y+y') \\ &= \lambda(4x-2y,x+y)+(4x'-2y',x'+y') = \lambda f(x,y)+f(x',y') \end{aligned}$$

Ainsi, $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est linéaire. Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Posons $v=(1,0)$ alors $f(v)=f(1,0)=(4,1)$, comme les vecteurs $(1,0)$ et $(4,1)$ sont non colinéaires, la famille $\mathscr{F}=(v,f(v))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, de plus, $|\mathscr{F}|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$, on en déduit que $\mathscr{F}=(v,f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ceci montre qu'il existe $v\in E$ tel que $(v,f(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$, par définition, l'endomorphisme f est donc cyclique.

3. Posons $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ où $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$, alors :
   - $f(e_1)=(4,1)=4e_1+1e_2$
   - $f(e_2)=f(0,1)=(-2,1)=-2e_1+1e_2$

   Ainsi, $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$

4. La famille $\mathscr{B}'$ est constituée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires, donc $\mathscr{B}'$ est libre. De plus, $|\mathscr{B}'|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$, ainsi $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   - $f(a)=f(1,1)=(2,2)=2a+0b$
   - $f(b)=f(2,1)=(6,3)=0a+3b$

   Ainsi, $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$

5. D'après la formule de changement de base, $A=PDP^{-1}$ avec $P=P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^p &= PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^p&0\\0&3^p\end{pmatrix}\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^p&2\times3^p\\2^p&3^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2\times3^p-2^p & 2\times(2^p-3^p)\\ 3^p-2^p & 2\times2^p-3^p\end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Si on prend $w=a$, alors $(w,f(w))=(w,2w)$ est une famille liée (deux vecteurs colinéaires), ainsi la famille $(w,f(w))$ n'est pas une base avec $w\in\mathbb{R}^2$ non nul. Ainsi, il existe bien un vecteur $w\in\mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w,f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.

7. $g\colon\begin{cases}\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto MX=\begin{pmatrix}z-y\\-x-z\\x-y\end{pmatrix}\end{cases}$

8. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} g^2(X) &= g(g(X)) = M(MX) = M^2X = \begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}2x-y+z\\-x+2y-z\\x-y+2z\end{pmatrix} \\ &= MX+2X = (g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(X) \end{aligned}$$

Comme cette égalité est valable pour tout $X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit l'égalité entre fonctions, ainsi $g^2=g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

9. Soit $v\in\mathbb{R}^3$, alors la famille $(v,g(v),g^2(v))=(v,g(v),g(v)+2v)$ est liée. En effet, le troisième vecteur est une combinaison linéaire des deux premiers. En particulier, pour tout $v\in\mathbb{R}^3$, la famille $(v,g(v),g^2(v))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme g n'est donc pas cyclique.

10. - $M-2I_3=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&-2&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$. En notant C_i la i-ième colonne de $M-2I_3$, on remarque que $C_1+C_3=C_2$, ainsi, $\mathrm{rg}(M-2I_3)=\mathrm{rg}(C_1,C_3)=2$ (les colonnes C_1 et C_3 étant non colinéaires). Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M-2I_3))+\mathrm{rg}(M-2I_3)=3$ (le nombre de colonnes de $M-2I_3$). Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(M-2I_3))=1$. De plus, $1C_1+(-1)C_2+1C_3=0$, dès lors, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M-2I_3)$, comme ce vecteur n'est pas nul, $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base $\mathrm{Ker}(M-2I_3)$
   - $M+I_3=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. En notant C_i la i-ième colonne de $M+I_3$, on remarque que $C_3=C_1$ et $C_2=-C_1$ ainsi, $\mathrm{rg}(M+I_3)=\mathrm{rg}(C_1)=1$ ($C_1\neq 0$). Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M+I_3))+\mathrm{rg}(M+I_3)=3$ (le nombre de colonnes de $M+I_3$). Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(M+I_3))=2$. De plus, $1C_1+0C_2+(-1)C_3=0$, dès lors, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M+I_3)$, de même $1C_1+1C_2+0C_3=0$, dès lors, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M+I_3)$ $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car deux vecteurs non colinéaires) de $\mathrm{Ker}(M+2I_3)$, comme $\dim(\mathrm{Ker}(M+I_3))=2$, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(M+I_3)$.

11. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors, en effectuant une opération sur les colonnes, puis en développant sur la troisième ligne :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2}{=}\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&0&1\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

   Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

12. - $g\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$
   - $g\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
   - $g\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

   Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

13. Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P+Q)&=(\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X)=\lambda P(X+1)+Q(X+1)-\lambda P(X)-Q(X)\\&=\lambda(P(X+1)-P(X))+Q(X+1)-Q(X)=\lambda\Delta(P)-\Delta(Q)\end{aligned}$$

   De plus, $d^\circ\Delta(P)\leqslant\max(d^\circ P(X+1),d^\circ P)=\max(d^\circ P\times d^\circ(X+1),d^\circ P)\leqslant\max(n,n)=n$. En conclusion, $\Delta\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

14. Soit $k\in[\![\,0\,;n\,]\!]$, $\Delta(X^k)=(X+1)^k-X^k=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i-X^k=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i+\binom{k}{k}X^k-X^k=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$.

15. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant. Notons $d = d^\circ P$. Alors il existe $(a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Comme Δ est linéaire,

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k) = a_d \Delta(X^d) + \sum_{k=1}^{d-1} a_k \Delta(X^k) + a_0 \Delta(1)$$

Remarquons que $\Delta(1) = 0$. De plus, soit $k \in [\![1 ; d]\!]$, alors comme $\Delta(X^k) = kX^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} X^i$, $d^\circ \Delta(X^k) = k-1$. Posons $Q = \sum_{k=1}^{d-1} a_k \Delta(X^k)$, ainsi, par degré d'une combinaison linéaire

$$d^\circ Q \leqslant \max(d^\circ \Delta(X^k) \mid k \in [\![1 ; d-1]\!]) \leqslant d-2$$

Ainsi,

$$\Delta(P) = a_a \Delta(X^a) + Q \quad \text{avec} \quad d^\circ Q \leqslant d-2 \qquad \text{et} \qquad d^\circ \left(a_d \Delta(X^d) \right) = d-1 \quad \text{car} \quad a_d \neq 0$$

Par degré de la somme de deux polynômes de degrés distincts, $d^\circ \Delta(P) = d - 1 = d^\circ P - 1$.

16. Considérons $P = X^n$. Montrons que $\mathscr{P}(i)$: «$d^\circ(\Delta^i(P)) = n - i$» est vraie pour tout $i \in [\![0 ; n]\!]$. Pour $i = 0$, $d^\circ(\Delta^0(P)) = d^\circ P = n$. Soit $i \in [\![0 ; n-1]\!]$, supposons $\mathscr{P}(i)$. Alors $d^\circ \Delta^i(P) = n - i > 0$. En particulier, $\Delta^i(P)$ et non constant. En utilisant la question précédente, $\Delta(\Delta^i(P)) = n - i - 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(i+1)$ est vraie. Par conséquent $\mathscr{F} = (P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P))$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $|\mathscr{F}| = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, ainsi $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme Δ est donc cyclique.

17. S'il existe un couple $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors la i-ième colonne de V_γ est égale à la j-ième colonne de V_γ, comme le déterminant est alternée, $\det(V_\gamma) = 0$.

18. Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$. Le coefficient à la i-ième ligne de C_j est γ_i^{j-1}. Ainsi, comme $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, en regardant le coefficient à la i-ième ligne, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_i^{j-1} = 0$. Ceci démontre que $P(\gamma_i) = 0$. Ainsi, P est un polynôme tel que $d^\circ P \leqslant n - 1$ dont γ_1, γ_2,..., γ_n sont n racines distinctes. Par conséquent, P est le polynôme nul. Dès lors, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_j = 0$. Ceci démontre que les colonnes C_1, C_2, ..., C_n sont linéairement indépendantes. Dès lors, $\mathrm{rg}({V_\gamma}^T) = n$, ceci démontre que $\det(V_\gamma) = \det({V_\gamma}^T) \neq 0$.

19. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons[1] $\mathscr{P}(p)$: «$h^p(v) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^p v_i$». Pour $p = 1$, par linéarité de h, $h(v) = h(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h(v_i) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i d_i v_i$, ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie[2]. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors en utilisant la linéarité de h :

$$h^{p+1}(v) \quad = \quad h(h^p(v)) = h\left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^p v_i \right) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^p h(v_i) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^p d_i v_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^{p+1} v_i$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Dès lors, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h^p(v) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^p v_i$.

20. La question précédente montre que :
   - $v = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i$
   - $h(v) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i d_i v_i$
   - $h^2(v) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^2 v_i$

1. Le sujet mettait des ... pour la somme, mais je préfère rédiger avec le symbole $\sum$.
2. Il aurait été plus simple d'initialiser pour $p = 0$, mais le sujet nous demandait pour $p \in \mathbb{N}^*$.

- $\vdots$
- $h^j(v) = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^j v_i$
- $\vdots$
- $h^{n-1}(v) = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i {d_i}^{n-1} v_i$

Ainsi, en se rappelant que l'on obtient la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée, en mettant les coordonnées de chacun des vecteurs en colonne, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 d_1 & \alpha_1 {d_1}^2 & \dots & \alpha_1 {d_1}^j & \dots & \alpha_1 {d_1}^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2 d_2 & \alpha_2 {d_2}^2 & \dots & \alpha_2 {d_2}^j & \dots & \alpha_2 {d_2}^{n-1} \\ \alpha_3 & \alpha_3 d_3 & \alpha_3 {d_3}^2 & \dots & \alpha_3 {d_3}^j & \dots & \alpha_3 {d_3}^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \\ \alpha_i & \alpha_i d_i & \alpha_i {d_i}^2 & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \alpha_n & \alpha_n d_n & \alpha_n {d_n}^2 & \dots & \alpha_n {d_n}^j & \dots & \alpha_n {d_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \left(\alpha_i {d_i}^{j-1}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

En utilisant la linéarité, par rapport à chaque ligne, on obtient que

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \det((V_d)^T) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \det(V_d)$$

21. - Supposons h cyclique. Cela veut dire qu'il existe $v \in E$ tel que $\mathscr{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ soit une base de E. Ainsi, d'après la question précédente, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \det(V_d) \neq 0$. En particulier, $\det(V_d) \neq 0$, par contraposée de la question 17, on en déduit que les d_i sont deux à deux distincts.
    - Réciproquement, supposons que les d_i sont deux à deux distincts. Posons, pour tout[3] $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\alpha_i = 1$, et $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \in E$ et $\mathscr{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$. En utilisant la question 20, on obtient que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det(V_d) \neq 0$ (d'après la question 18). Ceci montre que $\mathscr{F}$ est une base de E. Ainsi, h est cyclique.
22. L'endomorphisme f, de la première partie, était diagonalisable avec des coefficients diagonaux distincts (2 et 3) et on avait démontré qu'il était cyclique. L'endomorphisme g de la seconde partie, était diagonalisable avec des coefficients diagonaux (2, -1 et -1) qui n'étaient pas deux à deux distincts, et on avait démontré que g n'était pas cyclique. Ainsi le résultat démontré à la question précédente est bien cohérent avec les exemples des deux premières parties.
23. Comme h^{p-1} n'est pas la fonction nulle, il existe $x \in E$, $h^{p-1}(x) \neq 0$. Montrons que $\mathscr{F} = (x, h(x), h^2(x), \dots, h^{p-1}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$. Supposons que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i h^i(x) = 0_E$$

Supposons que l'un des λ_i soit non nul, posons $i_0 = \min\{i \in [\![0 ; p-1]\!], \lambda_i \neq 0\}$. Ainsi pour tout $i \in [\![0 ; i_0 - 1]\!]$, $\lambda_i = 0$. On a donc

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i h^i(x) = 0_E$$

On applique alors h^{p-i_0-1}, par linéarité, on obtient :

$$0_E = h^{p-i_0-1}\left(\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i h^i(x)\right) = \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i h^{p-i_0-1+i}(x) = \lambda_{i_0} h^{p-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} \lambda_i h^{p-i_0-1+i}(x) = \lambda_{i_0} h^{p-1}(x)$$

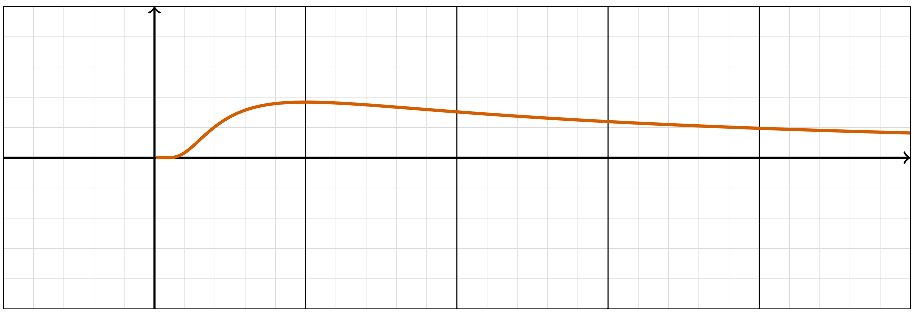
Comme $h^{p-1}(x) \neq 0_E$, $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde. Ainsi il n'est pas possible de trouver un λ_i non nul. Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. D'après le cours, le cardinal de toute famille de E est majorée par $\dim(E)$, ainsi $p \leqslant n$.

3. On pourrait poser n'importe quel réel non nul pour α_i, mais comme ici, c'est un résultat d'existence qu'il faut établir, on se contente d'exhiber un seul vecteur $v \in E$ qui convienne.

24. Comme $p \leqslant n$, il y a deux cas :
   - Si $p = n$, alors, en prenant $x \in E$ tel que $h^{n-1}(x) \neq 0_E$, la question précédente montre que la famille $\mathscr{F} = (x, h(x), \dots, h^{n-1}(x))$ est libre et $|\mathscr{F}| = n = \dim(E)$, ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de E, ainsi h est cyclique.
   - Si $p < n$, alors $h^p = 0$ et donc $h^{n-1} = 0$. Ainsi, pour tout $x \in E$, la famille $(x, h(x), \dots, h^{n-1}(x))$ est liée car son dernier vecteur est nul. L'endomorphisme h n'est donc pas cyclique.
25. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$, ainsi $d^\circ\Delta(P) \leqslant d^\circ P - 1$, si P est non constant, comme on a égalité, on a aussi $d^\circ\Delta(P) \leqslant d^\circ P - 1$. Ainsi, par récurrence sur $k \in [\![0\,; n]\!]$, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $d^\circ\Delta^k(P) \leqslant d^\circ P - k$. Ceci prouve que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta^{n+1}(P) = 0$. Ainsi, $\Delta^{n+1} = 0$. De plus, $\Delta^n(X^n)$ est non nul. Ceci prouve que Δ est nilpotent d'indice $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. D'après la question précédente, cela prouve que Δ est cyclique, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 16.

Problème d'analyse

1. La fonction $t \mapsto -1/t \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, de plus, $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par composition, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Comme $t \mapsto 1/t \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, par produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. De, plus, par la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables, on a pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}$. Ainsi, $tf'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t} = g(t)$.
2. Par croissance comparée $g(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0 : en notant $g(0) = 0$, la fonction g est maintenant continue en 0 donc sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $t > 0$,
$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - 0}{t - 0} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$
(ou la dernière limite est encore une croissance comparée). Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
3. Faire un tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+$, et tracer g (sachant que $e^{-1} \simeq 0,36$).



4. Ainsi, pour $x > 0$, $H(x) = \displaystyle\int_1^x g(1/t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \underbrace{t}_{u(t)}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t$. Avec $u\colon t \mapsto t$ et $v\colon t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,; x\,]$, ainsi, par intégration par parties
$$H(x) = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x - \int_1^x 1 \times (-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} + \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}(1+x)$$
5. Posons $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} H(x) &= 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-(1+h)}(2+h) \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-h}(2+h) \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1}\left(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)(2+h) \\ &= \mathrm{e}^{-1}h - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{6}h^3 + o(h^3) \\ &= \mathrm{e}^{-1}(x-1) - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

6. Soit $t > 0$, $f(t) = t/n$ ssi $f(t)/t = 1/n$ ssi $g(t) = 1/n$. Or $g(1) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0.36 > 1/3 \geqslant 1/n$ et $g(0) = 0$. Ainsi,
$$\frac{1}{n} \in [\,g(0)\,;g(1)\,]$$
Comme g est continue sur $[\,0\,;1\,]$, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un unique $\alpha_n \in [\,0\,;1\,]$ tel que $g(\alpha_n) = 1/n$. Comme $g(0) = 0 \neq 1/n$ et $g(1) = \mathrm{e}^{-1} \neq 1/n$, On en déduit que $\alpha_n \neq 0$ et $\alpha_n \neq 1$. Ainsi, $\alpha_n \in \,]\,0\,;1\,[$. De plus, g est strictement croissante sur $[\,0\,;1\,]$ donc injective sur $[\,0\,;1\,]$, ainsi ce α_n est unique dans $[\,0\,;1\,]$.
7. On procède par dichotomie, en cherchant un antécédent de $1/n$ par la fonction g. On part de $a = 0$ et $b = 1$, en effet, $g(0) = 0 \leqslant 1/n \leqslant \mathrm{e}^{-1} = g(1)$:

```
def alpha(n,epsilon):
        a=0
        b=1
        while b-a>epsilon:
                c=(a+b)/2
                if np.exp(-1/c)/c<=1/n:# on regarde si g(c)<=1/n
                        a=c# ainsi on a toujours g(a)<=1/n<=g(b)
                else:
                        b=c # ainsi on a toujours g(a)<=1/n<=g(b)
        return a
```

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, alors $g(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = g(\alpha_n)$. Or si $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$, comme g est croissante sur $[\,0\,;1\,]$, on obtient $g(\alpha_{n+1}) \geqslant g(\alpha_n)$. Ce qui est faux, ainsi $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Donc $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.
9. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est ainsi une suite décroissante et minorée (par exemple par 0), ainsi cette suite est convergente. On note ℓ sa limite. Notons que comme $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, on en déduit par passage [4] à la limite que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. On a $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Comme g est continue en $\ell \in [\,0\,;1\,]$, par caractérisation séquentielle de la continuité, $g(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(\ell)$. Or $g(\alpha_n) = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par unicité de la limite, $g(\ell) = 0 = g(0)$. Or, g est strictement croissante sur $[\,0\,;1\,]$ donc injective, dès lors, $\ell = 0$. Ainsi, $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
10.
    - Comme y est solution de (E), pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^2y'(x) + y(x) = x^2$. Ainsi, pour $x = 0$, on a
    $$0y'(0) + y(0) = 0^2$$
    Dès lors $u_0 = y(0) = 0$.
    - En dérivant (E),
    $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x$$
    En particulier, pour $x = 0$, on obtient $2 \times 0 \times y'(0) + 0^2 \times y''(0) + y'(0) = 2 \times 0 = 0$. Ainsi, $u_1 = 0$.
    - En dérivant à nouveau, l'équation obtenue,
    $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 2y'(x) + 2xy''(x) + 2xy''(x) + x^2y'''(x) + y''(x) = 2$$
    En particulier, pour $x = 0$, $2y'(0) + 2 \times 0 \times y''(0) + 2 \times 0 \times y''(0) + 0^2y'''(0) + y''(0) = 2$. Ainsi, $u_2 = 2$.
11. Soit un entier $n \geqslant 3$. Posons $h\colon x \mapsto x^2$, alors h et y' sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, par produit, la fonction hy' est de classe $\mathscr{C}^n$. Par dérivation n-ième, $(hy')^{(n)} + y^{(n)} = h^{(n)}$. Or,
    - $h^{(0)}\colon x \mapsto x^2$
    - $h^{(1)}\colon x \mapsto 2x$
    - $h^{(2)}\colon x \mapsto 2$
    - pour tout entier $i \geqslant 3$, $h^{(i)}\colon x \mapsto 0$ en particulier, $h^{(n)}\colon x \mapsto 0$

    Appliquons alors la formule de Leibniz :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}y'^{(n-k)} + y^{(n)} = h^{(n)}$$

4. Rappelons au passage que seules les inégalités larges passent à la limite.

Pour tout entier $k \geqslant 3$, $h^{(k)}$ est la fonction nulle, ainsi,

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} h^{(k)} y^{(n-k+1)} + y^{(n)} = 0$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\binom{n}{0} x^2 y^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1} 2xy^{(n)}(x) + \binom{n}{2} 2y^{(n-1)}(x) + y^{(n)} = 0$$

Or $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, ainsi :

$$x^2 y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

En remplaçant x par 0, on trouve, $u_n + n(n-1)u_{n-1} = 0$.

12. - $u_2 = 2$
    - $u_3 = -3 \times 2 \times u_2 = -3 \times 2 \times 2$
    - $u_4 = -4 \times 3 \times u_3 = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$
    - $u_5 = -5 \times 4 \times u_4 = -5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

    On conjecture, alors que $\mathscr{P}(n)$: «$u_n = (-1)^n n \times (n-1)!^2$», $\mathscr{P}(2)$ est vraie. Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$, alors

    $$u_{n+1} = -(n+1)nu_n = -(n+1)n \times (-1)^n \times n \times ((n-1)!)^2 = (-1)^{n+1} \times (n+1) \times (n!)^2$$

    ceci montre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = (-1)^n \times n \times ((n-1)!)^2$. Soit un entier $n \geqslant 2$, comme $y \in \mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 :

    $$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)! x^k + o(x^n)$$

13. - Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (E) est équivalente à $y' + \dfrac{1}{x^2} y = 1$.
    - L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{1}{x^2} y = 0$. Dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{1/x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
    - Cherchons une solution particulière de la forme $y_p \colon x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{1/x}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

      $$\forall x > 0 \qquad y_p'(x) + \frac{1}{x^2} y_p(x) = C'(x)\mathrm{e}^{1/x} - C(x)\mathrm{e}^{1/x}/x^2 + C(x)\mathrm{e}^{1/x}/x^2 = C'(x)\mathrm{e}^{1/x}$$

      Ainsi, y_p est une solution particulière si et seulement si $C'(x) = \mathrm{e}^{-1/x} = f(x)$ pour tout $x > 0$. On prend alors $C = F$ une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $x \mapsto F(x)\mathrm{e}^{1/x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
    - Par conséquent les fonctions solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions $x \mapsto (C + F(x))\mathrm{e}^{1/x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

14. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus[5], $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ (par croissance comparée), d'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est dérivable en 0, que $f'(0) = 0$ et que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $0f'(0) = 0 = g(0)$ (d'après la question 2).

15. Posons $u \colon t \mapsto t$, les fonctions u et f sont $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;x\,]$, en appliquant une intégration par parties :

    $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x u'(t)f(t)\mathrm{d}t = [u(t)f(t)]_0^x - \int_0^x u(t)f'(t) = xf(x) - 0f(0) - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-1/x} - 0 - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

5. Ça rime.

16. Soit $x \geqslant 1$. Tout d'abord, g est positive, donc $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale). De plus :

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \ln(x)$$

En notant $C = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C + \ln(x)$.

17. Soit $x \geqslant 1$, alors

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

(par croissance comparée), on en déduit que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{=} o(x)$. Ainsi, en utilisant la question 15, $F(x) \underset{+\infty}{=} x\mathrm{e}^{-1/x} + o(x)$. Alors, $F(x)/x = \mathrm{e}^{-1/x} + o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. On en déduit que

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$