DS8

3 juin 2023

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non-justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : ne ratez pas le train de la win !

Un groupe de huit étudiants de PCSI et dix étudiants de PC prend le train pour aller au ski¹. Ils ont réservé trois compartiments de six places chacun, et décident de se répartir les places au hasard.

21	23	25
22	24	26

TABLE 1 – Plan du premier compartiment : (par exemple, 21 est en face de 22, tandis que 24 est à côté de 26 et de 22)

1. Combien de façons y a-t-il de répartir les étudiants parmi les places qu'ils ont réservées ?
 2. Y. et A. font partie du groupe. Combien y a-t-il de façons de répartir les étudiants tels que Y. et A. soient dans le même compartiment.
 3. Quel est la probabilité qu'ils soient dans le même compartiment ?
- Y. et A. sont dans le premier compartiment.
4. Quelle est la probabilité que Y. et A. soient face à face ?
 5. Quelle est la probabilité qu'ils soient côte à côte ?
 6. À peine sortis du train, les étudiants se précipitent vers les remontées mécaniques. Ils se répartissent donc au hasard dans la queue pour le téléski. Quelle est la probabilité que tous les étudiants de PC soient devant tous les étudiants de PCSI ?

Exercice 2 : ne perdez pas la face !

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de face soit égale à p où $p \in]0; 1[$. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit les trois variables aléatoires X , Y et Z , définies sur un univers Ω , de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de faces obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de piles obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0 alors X et Y valent 0.

1. Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.
2. Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$
3. Pour $k \in X(\Omega)$ et $n \in Z(\Omega)$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X = k)$.
On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
4. Déterminer la loi du couple (X, Z) , c'est-à-dire déterminer pour tout $(k, n) \in X(\Omega) \times Z(\Omega)$

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (Z = n))$$

5. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
6. Montrer que pour tout les entiers naturels k et n tels que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

7. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$
8. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $(N, p/6)$ Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
9. Calculer $\mathbb{P}(X = N \text{ et } Y = N)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
10. Déterminer pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \cap (Y = y)$.

1. Ils ont néanmoins prévu de travailler leur cours bien sûr.

Exercice 3 : connaissez-vous intégralement vos primitives ?

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}$ sur $] -\pi/2 ; \pi/2 [$.
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$. Exprimer W_{n+2} en fonction de W_n .
4. Calculer $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$.
On pourra poser $t = \sqrt{x}$.
5. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.
On pourra poser $u = \sqrt{1+e^{2t}}$.

Exercice 4 : Riemann fait un somme !

Déterminer la limite de $(u_n)_n$ où $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{3n^2 - k^2}}$.

Exercice final faire fissa fi de la dérivée de ϕ !²

Démontrer que la fonction $\phi: x \mapsto \int_0^1 e^{xt^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de sa dérivée.

2. Vive les allitérations !