Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$, en développant, par identité remarquable, on a $|a|^2+|b|^2-2|a||b| \geqslant 0$, soit $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Correction de l'exercice 3.

- On remarque que
$$(\sqrt{x}+\sqrt{x'})^2 = x+2\sqrt{x}\sqrt{x'}+x' \geqslant x+x'$$
On applique donc la fonction racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\sqrt{x+x'} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x'}$.
- De plus, comme $x' \geqslant 0$, $x-x' \leqslant x+x'$, par croissance de la racine carrée :
$$\sqrt{x-x'} \leqslant \sqrt{x+x'} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x'}$$
Donc $\sqrt{x-x'} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x'}$
- En outre, $\sqrt{x} = \sqrt{(x-x')+x'} \leqslant \sqrt{x-x'}+\sqrt{x'}$, ainsi, $\sqrt{x}-\sqrt{x'} \leqslant \sqrt{x-x'}$

On a donc bien montré toutes les inégalités demandées.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

1. Remarquons que f est impaire, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) = -\sin(x)\cos^2(x)$ (par imparité du sinus et parité du cosinus). Si on étudie f sur $[\,0\,;\pi\,]$, alors par symétrie par rapport à 0, on obtiendra f sur $[\,-\pi\,;0\,]$ et donc sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$, intervalle de longueur 2π. Or f est 2π périodique, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)\cos^2(x+2\pi) = \sin(x)\cos^2(x) = f(x)$. Ainsi, par translation, on obtiendra le graphe de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi-x) = \sin(\pi-x)\cos(\pi-x)^2 = \sin(x)(-\cos(x))^2 = f(x)$. Ainsi, si on étudie f sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ par symétrie verticale d'axe $x=\pi/2$, on obtient f sur $[\,\pi/2\,;\pi\,]$ et donc sur $[\,0\,;\pi\,]$.

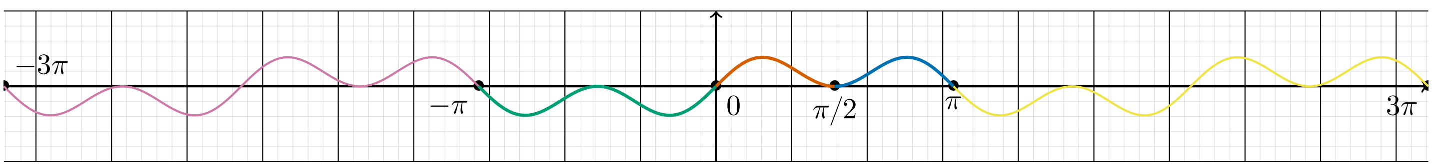

FIGURE 1 – La partie en rouge est la partie étudiée. Par symétrie verticale d'axe $x=\pi/2$, on en déduit la partie en bleu. Par symétrie axial, on en déduit la partie en vert. Par translation de 2π, on en déduit les parties jaune et violet.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

1. Posons $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$. Supposons que f soit majorée. Alors, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n\pi) \leqslant M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{2n\pi} \leqslant M$. Or $\mathrm{e}^{2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi, f n'est pas majorée. Supposons que f soit minorée. Alors, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant f(x)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant f(2n\pi+\pi)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant -\mathrm{e}^{2n\pi+\pi}$, d'où $\mathrm{e}^{2n\pi+\pi} \leqslant -m$ Or $\mathrm{e}^{2n\pi+\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi, f n'est pas minorée.
2. Posons $g\colon x \mapsto \dfrac{-7\sin(x^2)+2\cos(\sin(x))}{1+e^x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|g(x)| = \frac{|-7\sin(x^2)+2\cos(\sin(x))|}{|1+\mathrm{e}^x|} \leqslant \frac{|7\sin(x^2)|+|2\cos(\sin(x))|}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{7+2}{1} = 9$$
Ainsi, la fonction g est bornée.

3. Posons $h\colon x \mapsto (1+\cos(x))\ln(1+x^2)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\cos(x) \geqslant 0$ et $\ln(1+x^2) \geqslant \ln(1) = 0$, par produit, $h(x) \geqslant 0$. Ainsi, h est minorée par 0. Supposons que h soit majorée, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \leqslant M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(2n\pi) \leqslant M$, donc $2\ln(1+4n^2\pi^2) \leqslant M$. Or, $\ln(1+4n^2\pi^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on a donc une contradiction. Ainsi, h n'est pas majorée.
4. Posons $i\colon x \mapsto x + \dfrac{42}{x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $i(x) > 0$. La fonction i est minorée par 0. Cependant, $i(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, ainsi i n'est pas majorée.

Correction de l'exercice 9. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction est définie en x ssi $4x-3 \neq 0$ ssi $x \neq 3/4$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{3/4\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{3/4\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, alors :
$$y = f(x) = \frac{3x-2}{4x-3} \quad\iff\quad (4x-3)y = (3x-2) \quad\iff\quad x(4y-3) = 3y-2$$
Il y a alors deux cas :
   - Si $4y-3=0$, c'est-à-dire si $y=3/4$, alors $3y-2 = 1/4$, ainsi l'équation, d'inconnue x, $x(4y-3) = 3y-2$ n'a pas de solution et donc l'équation $y = f(x)$ n'a pas de solution
   - Si $4y-3 \neq 0$, alors d'après ce qui précède, $y = f(x)$ ssi $x = \dfrac{3y-2}{4y-3}$. De plus, si $x = \dfrac{3y-2}{4y-3}$, alors $x \neq 3/4$ (si $\dfrac{3y-2}{4y-3} = 3/4$, alors $4(3y-2) = 3(4y-3)$ et donc $-8=-9$ ce qui est impossible)

   On a ainsi montré que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{3/4\}$ vers $\mathbb{R}\backslash\{3/4\}$, car pour tout $y \in \mathbb{R}\backslash\{3/4\}$, on a trouvé un unique $x \in \mathbb{R}\backslash\{3/4\}$ et $x = \dfrac{3y-2}{4y-3}$, ainsi $f^{-1}\colon y \mapsto \dfrac{3y-2}{4y-3}$. On remarque que $f = f^{-1}$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x+1) \underset{f\text{ 2-périodique}}{=} f((x+1)+2) = f(x+3) \underset{f\text{ 2-périodique}}{=} f((x+3)+2) = f(x+5) \underset{f\text{ 5-périodique}}{=} f(x)$$
Ainsi, f est 1-périodique.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. L'application $x \mapsto x^2-1$ est strictement croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En outre $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, par composée de deux applications strictement croissante, f est strictement croissante sur[1] $[\,1\,;+\infty\,[$.

De plus, par composée de fonctions continues, f est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Ainsi, f réalise une bijection de $[\,1\,;+\infty\,[$ vers $\left[\,f(1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,\right[= [\,0\,;+\infty\,[$. Soit $y \in [\,0\,;+\infty\,[$, alors il existe un unique $x \in [\,1\,;+\infty\,[$ tel que $y = f(x)$, ainsi $y^2 = x^2-1$, donc $x^2 = y^2+1$ donc $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2+1}$. Or $x \geqslant 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$. Dès lors, $x = \sqrt{y^2+1}$, Par conséquent[2], $f^{-1}\begin{cases}[\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow [\,1\,;+\infty\,[\\ \qquad y \quad\longmapsto \sqrt{y^2+1}\end{cases}$.

Correction de l'exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq a$, en divisant par $|x-a|$, on a $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|} \leqslant \dfrac{3}{2}|x-a|^{\frac{3}{2}}$, soit
$$-\frac{3}{2}|x-a|^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{3}{2}|x-a|^{\frac{3}{2}}$$

1. Dériver f serait une mauvaise idée, dans la mesure où la racine carrée n'est pas dérivable en 0, on ne peut dériver f en 1 par la formule de dérivée de la composée.
2. Ou bien $f^{-1}\begin{cases}[\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow [\,1\,;+\infty\,[\\ \qquad x \quad\longmapsto \sqrt{x^2+1}\end{cases}$, si on n'aime pas les fonctions dont y est la variable (muette).

Comme $\frac{3}{2}|x-a|^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, par théorème d'encadrement, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Dès lors, f est dérivable en a et $f'(a)=0$. Et ce pour tout $a\in\mathbb{R}$. Ainsi, f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

1. Remarquons que $x\mapsto x+\lambda$ et $x\mapsto x^2+1$ sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $x^2+1\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi, par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-2x(x+\lambda)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x\lambda+1}{(x^2+1)^2}$$
Ainsi, l'équation de la tangente de f_λ en 0 est $x\mapsto f(0)+f'(0)(x-0)=\lambda+x$ Donc, les tangentes aux courbes de f_λ en $x=0$ sont parallèles (car ont toutes le même coefficient directeur).
2. En revanche, l'équation de la tangente de f_λ en 1 est
$$T_\lambda\colon x\mapsto f(1)+f'(1)(x-1)=\frac{1+\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}(x-1)=1+\lambda-\frac{\lambda}{2}x$$
On remarque alors que $T_\lambda(2)=1$. Ainsi, toutes les tangentes de f_λ en 1 sont concourantes au point $(2,1)$.

Correction de l'exercice 18. Pour tout $x>0$
$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x} \quad&\iff\quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)}=\mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \quad\iff\quad \sqrt{x}\ln(x)=\frac{x}{2}\ln(x)\\
&\iff\quad \left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)\ln(x)=0 \quad\iff\quad \ln(x)=0 \text{ ou } \sqrt{x}=\frac{x}{2} \quad\underset{x\geqslant 0}{\iff}\quad \ln(x)=0 \text{ ou } x=\frac{x^2}{4}\\
&\underset{x\neq 0}{\iff}\quad x=1 \text{ ou } 1=\frac{x}{4} \quad\iff\quad x=1 \text{ ou } x=4
\end{aligned}$$
La deuxième équivalence est justifée par le fait qu'on puisse passer une égalité par la fonction exponentielle ou la fonction logarithme.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23.

1. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)>0$, ainsi la fonction sh est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x)\,;\lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)\right[=\left]-\infty\,;+\infty\right[=\mathbb{R}$.
2. ch est dérivable sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)\geqslant 0$ et $\mathrm{sh}(x)=0$ ssi $x=0$, donc la dérivée de ch est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 0, ainsi ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme ch est aussi continue, ch réalise[3] une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\left[\mathrm{ch}(0)\,;\lim_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)\right[=\left[1\,;+\infty\right[$.
3. La fonction th est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ainsi, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{th}'(x)=\frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}=\frac{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}>0$$
Ainsi, la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$\mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1 \quad\text{et}\quad \mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\xrightarrow[x\to-\infty]{}-1$$
Comme th est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, th est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim_{x\to-\infty}\mathrm{th}(x)\,;\lim_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)\right[=\left]-\infty\,;+\infty\right[=\mathbb{R}$.

3. On remarque que comme ch est paire, ch ne peut pas être une bijection dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, en effet, comme $\mathrm{ch}(1)=\mathrm{ch}(-1)$, 1 et -1 sont deux antécédents de $\mathrm{ch}(1)$. Par contre, ch réalise aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ vers $\left[1\,;+\infty\right[$ et on aurait pu faire tout l'exercice avec $\mathbb{R}_-$ à la place de $\mathbb{R}_+$.

4. • Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $a = \operatorname{argsh}(x) \in \mathbb{R}$. Notons que sh est dérivable en a et $\operatorname{sh}'(a) = \operatorname{ch}(a) \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argsh est dérivable en x et

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(a)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))}$$

Or, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))^2 - \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x))^2 = 1$. Donc $\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1 + x^2$, ainsi $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(a)) = \pm\sqrt{1+x^2}$, or $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) > 0$. Dès lors, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, ainsi $(\operatorname{argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi, la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{argsh}' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

• Soit $x \in \left]1\,;+\infty\right[$, posons $a = \operatorname{argch}(x) \in \mathbb{R}_+$. Si $a = 0$, alors $\operatorname{ch}(a) = x = 1$ ce qui est exclus ici. Ainsi, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons que ch est dérivable en a et $\operatorname{ch}'(a) = \operatorname{sh}(a) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argch est dérivable en x et

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(a)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))}$$

Or, $\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x))^2 - \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))^2 = 1$. Donc $\operatorname{sh}^2(\operatorname{argch}(x)) = x^2 - 1$, ainsi $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \pm\sqrt{x^2-1}$, or $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) > 0$. Dès lors, $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$, ainsi $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Ainsi, la fonction argch est dérivable sur [4] $\left]1\,;+\infty\right[$ et $\operatorname{argch}' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

• Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$, posons $a = \operatorname{argth}(x) \in \mathbb{R}$. Notons que th est dérivable en a et $\operatorname{th}'(a) = 1 - \operatorname{th}^2(a) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité d'une bijection réciproque, argth est dérivable en x et

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(a)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Ainsi, la fonction argth est dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$ et $\operatorname{argth}' : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

5. • Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $y = \operatorname{argsh}(x)$, alors $\mathrm{e}^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$, soit $\mathrm{e}^y = \operatorname{ch}(y) + x$ et

$$\operatorname{ch}(y) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(y)} = \sqrt{1+x^2}$$

Ainsi, $\mathrm{e}^y = \sqrt{1+x^2} + x$, dès lors $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Dès lors $\operatorname{argsh} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

• Soit $x \in \left[1\,;+\infty\right[$, on note $y = \operatorname{argch}(x)$, alors $\mathrm{e}^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$ soit $\mathrm{e}^y = x + \operatorname{sh}(y)$ avec

$$\operatorname{sh}(y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(y) - 1} = \sqrt{x^2-1}$$

Ainsi, $\mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2-1}$, dès lors $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Dès lors $\operatorname{argch} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

• Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$, on note $y = \operatorname{argth}(x)$, alors

$$\mathrm{e}^{2y} = \frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{-y}} = \frac{\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y)} = \frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)} = \frac{1+x}{1-x}$$

ainsi $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Dès lors, $\operatorname{argth} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Correction de l'exercice 24. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \sin(2x) = -\sin(x) \iff \sin(2x) = \sin(-x) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2x = -x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi + x + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = (2k+1)\pi
\end{aligned}$$

4. La fonction argch ne peut pas être dérivable en 1, car si $x = 1$, $a = \operatorname{argch}(1) = 0$ et ch admet une tangente horizontale en 0, par symétrie argch admet une tangente verticale en 1.

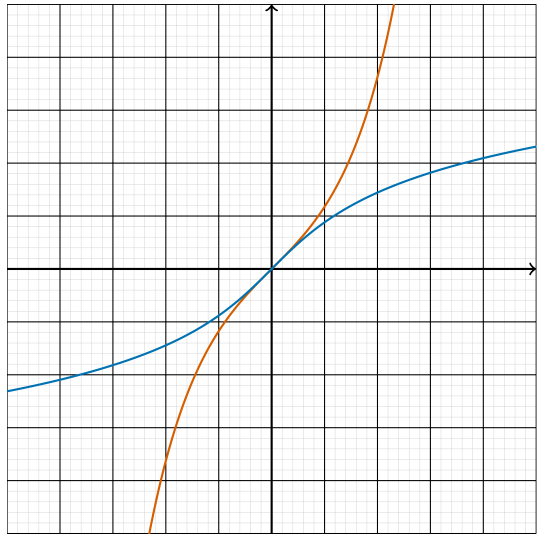

FIGURE 2 – En rouge, la fonction sh et en bleu, sa bijection réciproque.

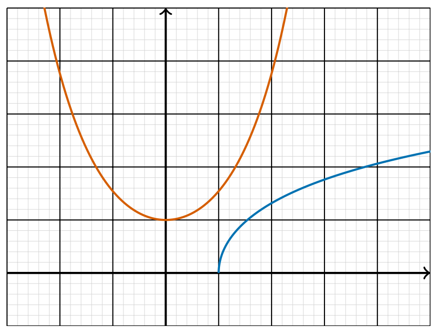

FIGURE 3 – En rouge, la fonction ch, non bijective et en bleu, la bijection réciproque de ch restreinte à $\mathbb{R}_+$.

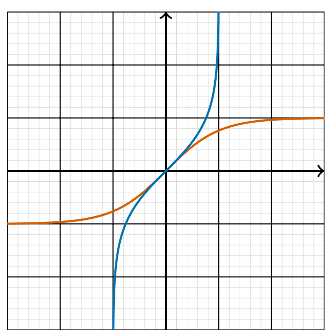

FIGURE 4 – En rouge, la fonction th et en bleu, sa bijection réciproque.

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, remarquons que $\cos^2(x) \leqslant 1$, ainsi $\cos^4(x) \leqslant \cos^2(x)$, de même $\sin^4(x) \leqslant \sin^2(x)$. Ainsi, x est solution ssi $1 = \cos^4(x) + \sin^4(x) \leqslant \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Cela est donc possible ssi $\cos^4(x) = \cos^2(x)$ et $\sin^4(x) = \sin^2(x)$ ssi $\cos^2(x)(\cos^2(x) - 1) = 0$ et $\sin^2(x)(\sin^2(x) - 1) = 0$ ssin $\cos^2(x)\sin^2(x) = 0$. ssi $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\pi/2$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indication, on obtient :

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \sin(2x)+(\sin(x)+\sin(3x)) = \sin(2x)+2\sin(2x)\cos(x) = \sin(2x)\left(1+2\cos(x)\right)$$

Ainsi, $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ ssi $\sin(2x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$. Or $\sin(2x) = 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = k\pi$. $1 + 2\cos(x) = 0$ ssi $\cos(x) = -1/2$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\pi/3 + 2k\pi$ ou $x = -2\pi/3 + 2k\pi$. Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4.

5.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29. Calculons la tangente du membre de droite :

$$\tan\left(\arctan(1/2) + \arctan(1/3)\right) = \frac{\tan(\arctan(1/2)) + \tan(\arctan(1/3))}{1 - \tan(\arctan(1/2))\tan(\arctan(1/3))} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = \tan(\pi/4)$$

Attention, à ne pas aller trop vite, ce n'est pas parce que $\tan(a) = \tan(b)$ que nécessairement $a = b$. Ici, comme $0 \leqslant 1/2 < 1$ et que arctan est strictement croissante, $\arctan(0) \leqslant \arctan(1/2) < \arctan(1)$, ainsi $0 \leqslant \arctan(1/2) < \pi/4$. De même, $0 \leqslant \arctan(1/3) < \pi/4$. Par somme $0 \leqslant \arctan(1/2) + \arctan(1/3) < \pi/2$. Ainsi, comme

$$\tan\left(\arctan(1/2) + \arctan(1/3)\right) = \tan(\pi/4)$$

On peut appliquer arctan et la relation $\arctan(\tan(x)) = x$ valable seulement pour $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, ainsi

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$$

Correction de l'exercice 30.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) &= \frac{\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a}}{2}\frac{\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-b}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2}\frac{\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-b}}{4} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{a+b} + 2\mathrm{e}^{-a-b}}{4} = \mathrm{ch}(a+b)
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = (\mathrm{e}^{x})^n = \mathrm{e}^{nx} = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.