DM1: à rendre le mercredi 8 Novembre 2023

Exercice 1 : il ne faut pas traiter intégralement les primitives comme des sauvages

Cet exercice est facultatif si la somme des points obtenus à l'exercice 1 du DS2 dépasse 20.

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 20}$ en précisant le ou les intervalles.
2. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x + 3}$ en précisant le ou les intervalles.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 10x + 25}\,\mathrm{d}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x + 3x\ln(x)}$
7. À l'aide d'un changement de variable, calculer une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$

Exercice 2 : quatre fonctions de référence pour faire un gâteau anglais

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} < 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arccos\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right) + 2\arctan(\mathrm{e}^x) = \pi$$

Exercice 3 : les intégrales sont de la party !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

1. Calculer $u_n - u_{n+1}$ sous forme d'intégrale.
2. En remarquant que $u_n = \displaystyle\int_0^1 1\times(1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x$ et en procédant par une intégration par parties, déterminer une relation entre u_n et u_{n+1}
3. Calculer u_1, u_2 et u_3.
4. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.
5. La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ?

Exercice 4 : montrer toute l'amplitude de vos capacités

1. Mettez $3-3\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique
2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y''+6y'+13y &= 26 \\ y(0) &= 5 \\ y'(0) &= -6\sqrt{3}-9 \end{cases}$$

   On notera f la solution. On mettra les termes en cosinus et en sinus sous la forme $A\cos(\omega x+\varphi)$ où on explicitera A, ω et φ.
3. Résoudre les équations d'inconnue x suivantes :
   (a) $f(x)=2$
   (b) $f(x)=2+6\mathrm{e}^{-3x}$
   (c) $f(x)=2-6\mathrm{e}^{-3x}$
4. Dessiner cette solution. On pourra dessiner les fonctions auxiliaires $x\mapsto 2\pm 6\mathrm{e}^{-3x}$.

Problème : va falloir brancher Lambert

Le but de l'exercice est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x\mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction f (tableau de variations et limites).
2. Tracer soigneusement sur un grand graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.
3. Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points abscisse 0 et -1 et les porter sur le graphique.
4. Justifier que l'application $g\colon \begin{cases} [-1\,;+\infty[\longrightarrow [-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W.

5. Justifier que W est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.
6. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
7. Donner les équations des tangentes à la courbe de W aux points d'abscisse 0 et $-\mathrm{e}^{-1}$.
8. Tracer, sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_W$ représentant W et ses deux tangentes.
9. Prouver que

$$\forall x\in\,]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[\,\backslash\{0\} \qquad W'(x)=\frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

10. Démontrer que l'application $h\colon \begin{cases}]-\infty\,;-1] \longrightarrow [-\mathrm{e}^{-1}\,;0[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.
W et V sont appelées les deux branches de la fonction de Lambert et elles ne s'expriment pas à l'aide de fonctions usuelles.)

11. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^{x}=m \qquad (E)$$

   Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (E). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.