

Exercice 1 : il ne faut pas traiter intégralement les primitives comme des sauvages

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$, ainsi il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{5, -4\}$,

$$\frac{1}{x^2 - x - 20} = \frac{1}{(x - 5)(x + 4)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 4}$$

En multipliant par $x - 5$ et en faisant tendre x vers 5, on trouve $\frac{1}{9} = A$. En multipliant par $x + 4$ et en faisant tendre x vers -4 , on trouve $\frac{1}{-9} = B$. Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 20} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{x - 5} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{x + 4}$ admet comme primitive $x \mapsto \frac{1}{9} \ln(|x - 5|) - \frac{1}{9} \ln(|x + 4|)$ sur $] -\infty; -4[$, sur $] -4; 5[$ ou sur $] 5; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 3}$ sur \mathbb{R} .

$$3. \int_2^3 \frac{1}{x^2 + 10x + 25} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x + 5)^2} dx = \left[\frac{-1}{x + 5}\right]_2^3 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{56}$$

4. On pose $u: x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v: x \mapsto \ln(x)$, $(u, v) \in \mathcal{C}^1([1; e], \mathbb{R})^2$, $u': x \mapsto x$ et $v': x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

5. On pose $u: x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $v: x \mapsto \ln(x)$, $(u, v) \in \mathcal{C}^1([1; e], \mathbb{R})^2$, $u': x \mapsto x^2$ et $v': x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3x} dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

6. On pose $t = \ln(x)$, alors $dt = \frac{dx}{x}$, donc $dx = x dt = e^t dt$, ainsi,

$$\int_1^e \frac{dx}{x + 3x \ln(x)} = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t + 3e^{2t}} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + 3t} = \left[\frac{1}{3} \ln(1 + 3t)\right]_0^1 = \frac{\ln(4)}{3}$$

7. On pose $u = \ln(t)$, alors $du = \frac{dt}{t}$ donc $dt = t du = e^u du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int^x \cos(\ln(t)) dt &= \int^{\ln(x)} \cos(u) e^u du = \int^{\ln(x)} \operatorname{Re}(e^{iu}) e^u du = \int^{\ln(x)} \operatorname{Re}(e^{iu} e^u) du \\ &= \operatorname{Re} \left(\int^{\ln(x)} e^{u(i+1)} du \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{u(i+1)}}{i+1} \right]^{\ln(x)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\ln(x)} e^{i \ln(x)} (1 - i)}{2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{x(\cos(\ln(x)) + i \sin(\ln(x)))(1 - i)}{2} \right) = \frac{x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x))}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x))}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 2 : quatre fonctions de référence pour faire un gâteau anglais

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$, ainsi, $\operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$. De même, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x > 0$, ainsi, $\operatorname{sh}(x) > -\operatorname{ch}(x)$. Ainsi, $-\operatorname{ch}(x) < \operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$. En divisant par $\operatorname{ch}(x) > 0$, on obtient, $-1 < \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x) < 1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x) \in]-1; 1[$ et donc $\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$ est dans l'ensemble de définition d'arccos. Ainsi, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) + 2\arctan(e^x)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]-1; 1[\\ x \longmapsto \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x) \end{cases}$ est dérivable sur \mathbb{R} (comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le

dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . De plus, arccos est dérivable sur $]-1; 1[$, par composition $x \mapsto \arccos(\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x))$ est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, par composition, $x \mapsto \arctan(e^x)$ est également dérivable sur \mathbb{R} . Par somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)^2}} + 2e^x \times \frac{1}{1 + (e^x)^2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}}} + \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{-\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} + \frac{2}{e^{-x} + e^x} = \frac{-1}{\operatorname{ch}(x)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de f est nulle sur \mathbb{R} . La fonction est constante sur l'intervalle \mathbb{R} . Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \arccos(0) + 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi$

Exercice 3 : les intégrales sont de la party !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Par linéarité de l'intégrale :

$$u_n - u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

2. Posons $u: x \mapsto x$ et $v: x \mapsto (1+x^2)^{-n}$. Alors $(u, v) \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})^2$. Par dérivation, $u': x \mapsto 1$ et $v': x \mapsto -2nx(1+x^2)^{-n-1}$, ainsi par intégration par parties :

$$u_n = \int_0^1 1 \times \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = [x(1+x^2)^{-n}]_0^1 - \int_0^1 x \times (-2nx(1+x^2)^{-n-1}) dx = 2^{-n} + 2n \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

Ainsi, en utilisant la question 1, $u_n = 2^{-n} + 2n(u_n - u_{n+1})$ soit encore $u_n(1 - 2n) = 2^{-n} - 2nu_{n+1}$, donc $u_n(2n - 1) + 2^{-n} = 2nu_{n+1}$. Finalement,

$$u_{n+1} = u_n \frac{2n-1}{2n} + \frac{1}{2^{n+1}n}$$

3. • $u_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$
 • En appliquant la formule obtenue à la question 2 à $n = 1$, on obtient

$$u_2 = u_1 \frac{2-1}{2 \times 1} + \frac{1}{2^2 \times 1} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

• En appliquant la formule obtenue à la question 2 à $n = 2$, on obtient

$$u_3 = u_2 \frac{3}{4} + \frac{1}{2^3 \times 2} = \frac{3\pi}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$. Remarquons que pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \geq 0$, par positivité de l'intégrale $u_n - u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{(1+x^2)^n} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ est donc une suite convergente.

Remarque 1. Cela ne permet pas de déterminer la limite.

Exercice 4 : montrer toute l'amplitude de vos capacités

1. Posons $z = 3 - 3i\sqrt{3}$, alors $|z| = \sqrt{9 + 27} = 6$. Ainsi, $z = 6 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2. L'équation $y'' + 6y' + 13y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + 6r + 13 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4i)^2$. Ainsi, les racines de cette équation sont

$$\frac{-6 + 4i}{2} = -3 + 2i \quad \text{et} \quad \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i$$

Ainsi, les solutions réelles de l'équation homogène sont exactement les fonctions

$$x \mapsto e^{-3x} (A \cos(2x) + B \sin(2x))$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. De plus, comme le second membre est une fonction constante (polynomiale de degré 0), on cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p: x \mapsto c$. On a lors, $0 + 0 + 13c = 26$. Ainsi, $c = 2$. Ainsi, $x \mapsto 2$ est une solution particulière. Par conséquent, les solutions de l'équation $y'' + 6y' + 13y = 26$ sont exactement les fonctions $x \mapsto 2 + e^{-3x} (A \cos(2x) + B \sin(2x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Fixons $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f: x \mapsto 2 + e^{-3x} (A \cos(2x) + B \sin(2x))$, alors $f(0) = 2 + A$, ainsi, $f(0) = 5$ ssi $A = 3$. Prenons alors $A = 3$ de plus, par produit, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3e^{-3x} (A \cos(2x) + B \sin(2x)) + e^{-3x} (-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x))$, ainsi, $f'(0) = -3A + 2B = -9 + 2B$, ainsi, $f'(0) = -6\sqrt{3} - 9$ ssi $B = -6\sqrt{3}$. Ainsi, $f: x \mapsto 2 + e^{-3x} (3 \cos(2x) - 6\sqrt{3} \sin(2x))$ est l'unique solution du système demandée. En factorisant par 6 :

$$f: x \mapsto 2 + 6e^{-3x} \left(\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(2x) \right) = 2 + 6e^{-3x} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- (a) $f(x) = 2$ ssi $6e^{-3x} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ssi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$
- (b) $f(x) = 2 + 6e^{-3x}$ ssi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$
- (c) $f(x) = 2 - 6e^{-3x}$ ssi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$
4. Voir figure.

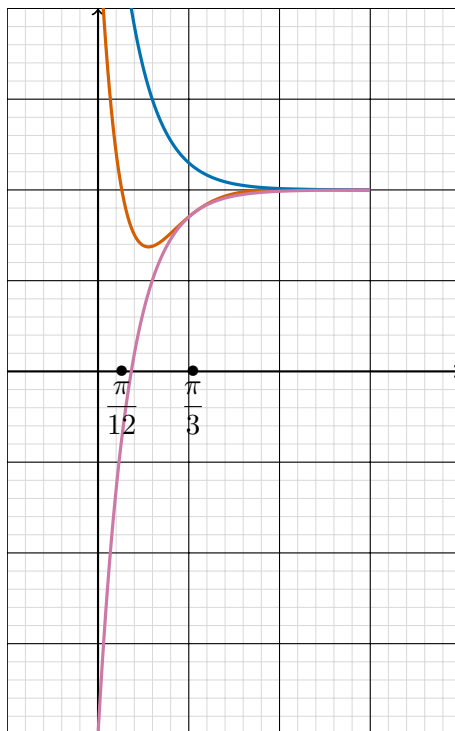


FIGURE 1 – En rouge la courbe de f , en bleu la courbe de $x \mapsto 2 + 6e^{-3x}$ et en violet la courbe de $x \mapsto 2 - 6e^{-3x}$.

Problème : va falloir brancher Lambert

1. Remarquons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par produit de limites infinies et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ par croissances comparées. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} par produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on obtient le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $+$
$f(x)$	0		$+\infty$

$-e^{-1}$

FIGURE 2 – Tableau de variation de f .

- 2.
3. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)x + f(0) = x$.
L'équation de la tangente de f en -1 est $y = f'(-1)x + f(-1) = -e^{-1}$.
4. g est strictement croissante et continue sur $[-1; +\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers l'intervalle

$$g([-1; +\infty[) = \left[g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [-e^{-1}; +\infty[$$

5. Soit $x \in]-e^{-1}; +\infty[$. Posons $a = W(x) \in [-1; +\infty[$. Remarquons que si $a = -1$, alors $x = g(a) = g(-1) = -e^{-1}$ ce qui est exclu, donc $a > -1$, ainsi g est dérivable en a et $g'(a) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité de la bijection réciproque W est dérivable en x . Ainsi, W est dérivable sur $] -e^{-1}; +\infty [$.

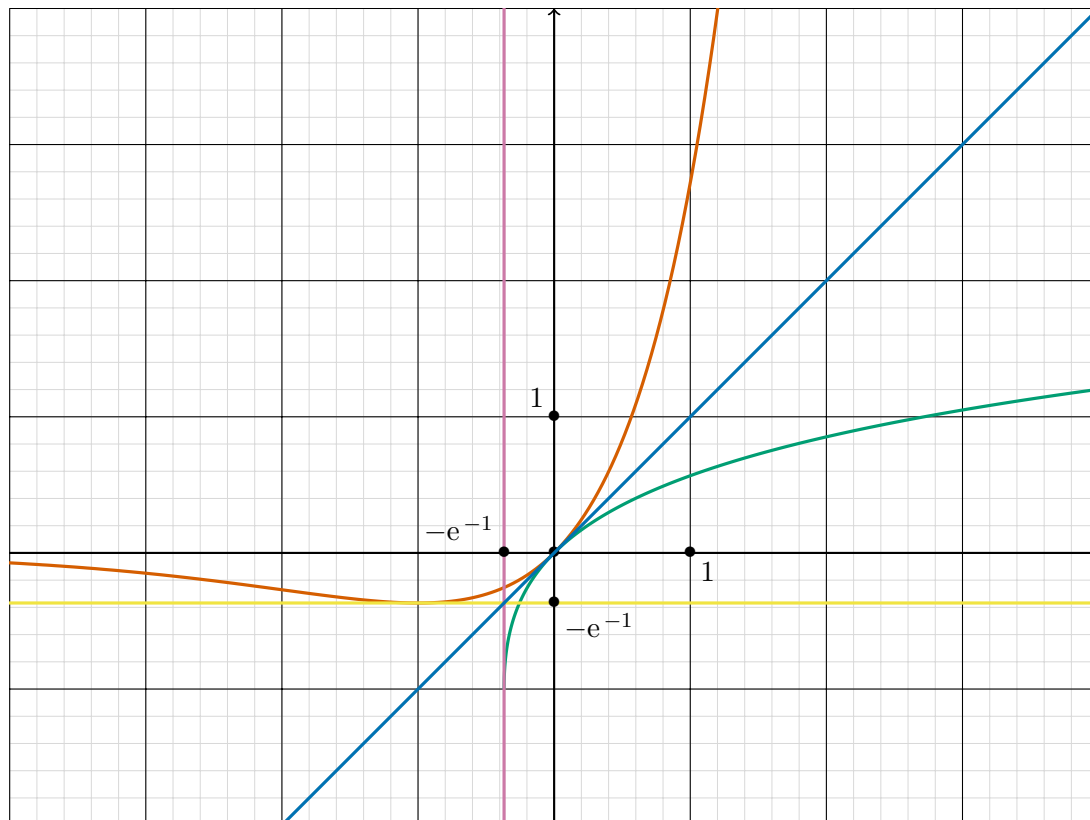


FIGURE 3 – En rouge la courbe de f . En jaune la tangente de f en -1 . En vert la courbe de W , en violet la courbe de W en $-e^{-1}$ et en bleu la tangente commune de f et de W en 0 .

6. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $0 = W(0)$.
D'après la formule du cours

$$W'(0) = \frac{1}{g'(W(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

7. L'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0 est $y = W'(0)x + W(0) = x$.
La tangente à la courbe de W au point d'abscisse $-e^{-1}$ est verticale d'équation $x = -e^{-1}$.
(car celle de f est horizontale au point $x = -1$)
- 8.
9. Soit $x \in]-e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}$ D'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque :

$$W'(x) = \frac{1}{g'(W(x))} = \frac{1}{(W(x) + 1)e^{W(x)}}$$

Mais $g(W(x)) = x$ soit $W(x)e^{W(x)} = x$. Comme $x \neq 0$, on peut en déduire que $W(x) \neq 0$ et donc que $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ soit :

$$W'(x) = \frac{1}{(W(x) + 1) \frac{x}{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

10. De même qu'à la question 4, l'application h est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ et continue. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, h réalise donc une bijection de l'intervalle $] -\infty; -1]$ vers l'intervalle

$$h[] -\infty; -1]) = \left[h(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[= [-e^{-1}; 0 [$$

11. Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions :
- Si $m < -e^{-1}$. Pour $x \in] -\infty; -1]$, $x \leq 1$, par décroissance de f sur $] -\infty; -1]$, $f(x) \geq f(-1) > m$. Pour $x \in [-1; +\infty [$, $x \geq 1$, par croissance de f sur $[-1; +\infty [$, $f(x) \geq f(-1) > m$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > m$. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$: zéro solution.

- Si $m = -e^{-1}$ Pour $x \in]-\infty; -1[$, $x < 1$, par décroissance stricte de f sur $]-\infty; -1]$, $f(x) > f(-1) = m$. Pour $x \in [-1; +\infty[$, $x > 1$, par croissance stricte de f sur $[-1; +\infty[$, $f(x) > f(-1) > m$. Si $x = -1$, $f(x) = m$. Donc $\mathcal{S} = \{-1\}$: une seule solution.
- Si $-e^{-1} < m < 0$, Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq -1$, alors $f(x) = m$ ssi $g(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Si $x \leq -1$, alors $f(x) = m$ ssi $h(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{V(m), W(m)\}$. Notons que si $V(m) = W(m)$, alors nécessairement $m = -e^{-1}$ ce qui est exclus ici, donc $V(m) \neq W(m)$, il y a donc deux solutions.
- Si $m \geq 0$, Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) < 0 \leq m$. Et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = m$ ssi $g(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Donc $\mathcal{S} = \{W(m)\}$: une seule solution.