Wallis in wonderland [1]

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Grâce à la formule du binôme de Newton, linéariser $\cos^2(t)$, $\cos^3(t)$, $\cos^4(t)$, $\cos^5(t)$ et $\cos^6(t)$.

Remarque 1. On ne connaît pas facilement de primitives de $t \mapsto \cos^n(t)$ pour un entier n quelconque.

2. Calculer W_0, W_1, W_2, W_3 et W_4.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
5. En déduire que $(W_n)_n$ est une suite convergente.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   Indication : se rappeler que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$
8. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Que vaut cette constante ?
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$
10. En déduire que $W_{n+1} \sim W_n$.
11. En déduire un équivalent de W_n, quelle est la limite de W_n ?
12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer W_{2p} en fonction de W_{2p-2} puis en fonction de W_{2p-4} en réitérant le processus exprimer W_{2p} en fonction de W_0 et de certains produits.
13. Soit $p \in \mathbb{N}$, simplifier les produits trouvés à la question précédente pour exprimer W_{2p} uniquement à l'aide de factorielles et de puissances.

Le raisonnement que l'on vient de faire peut sembler peu rigoureux avec l'usage des ... on peut rendre ça rigoureux en laissant cette partie au brouillon et procéder comme suit :

14. Montrer, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$
15. En admettant [2] qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ trouver la valeur de C [3].
16. En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Une suite en escargot à savoir traiter vite

On considère $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. Posons $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

2. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
3. Dans cette question seulement, on prend $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Représenter graphiquement la fonction f et le tracé soigné des premiers points de la suite $(u_n)_n$.

On pose $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et on fixe maintenant $u_0 \in [\,0\,;\ell\,]$.

1. Merci à Armand Mabondzo d'avoir proposé ce titre.
2. On admet ce résultat provisoirement, et on le démontrera en fin d'année.
3. L'équivalent de $n!$ une fois C trouvé s'appelle la formule de Stirling et sera une formule à connaître en deuxième année.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [\,0\,;\ell\,]$ et $u_{2n+1} \in [\,\ell\,;1\,]$.
5. Étudier le signe de $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$.
6. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier les variations de $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$.
7. En déduire que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent. On en déduit donc que $(u_n)_n$ converge.