Chapitre 11
Dérivabilité

Le but de ce chapitre est de redéfinir le concept de fonctions dérivables et de démontrer les théorèmes qui utilisent les fonctions dérivables que nous avions admis lors du chapitre 2.

Table des matières

1 Fonctions dérivables **2**
- 1.1 Dérivabilité . . . 2
- 1.2 Dérivabilité à gauche et à droite . . . 2
- 1.3 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 3

2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis **4**

3 Applications de la dérivabilité **6**
- 3.1 Extrema locaux et globaux . . . 6
- 3.2 Application aux suites récurrentes . . . 7
- 3.3 Caractérisation de la monotonie . . . 7
- 3.4 Fonctions convexes . . . 8

4 Dérivées successives et fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ **10**

5 Extension aux fonctions à valeurs complexes **13**
- 5.1 Définition de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes . . . 13
- 5.2 Ce qui est encore valable . . . 13
- 5.3 Ce qui n'est plus valable . . . 13

6 Méthodes **13**

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une application, a et b deux réels tels que $a < b$.

1 Fonctions dérivables

1.1 Dérivabilité

Définition du taux d'accroissement et du nombre dérivé

On appelle **taux d'accroissement** de f entre $a \in I$ et $b \in I$ avec $a \neq b$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est la pente de la droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

La fonction f est dite **dérivable** en $a \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, dans ce cas, on pose $f'(a) = \ell$, $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a.

Remarque 1. Cela est équivalent à ce que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ell \in \mathbb{R}$ et dans ce cas $\ell = f'(a)$.

Exemple 1. Montrer que $x \mapsto x^2$ est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Définition

Si f est dérivable en $a \in I$, la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée **approximation affine de la fonction** f **au point** a. Sa courbe est appelée **tangente** à f au point d'abscisse a.

Remarque 2. Ainsi, $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la meilleure approximation affine de f en a.

Définition de la dérivabilité sur un intervalle

f est dite dérivable sur I si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a. On appelle alors **fonction dérivée** : $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$

Théorème n° 1 : la dérivabilité implique la continuité

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Péril imminent : la réciproque n'est vraie que dans vos rêves

La réciproque est fausse. Penser à $x \mapsto \sqrt{x}$.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition de la dérivabilité à gauche et à droite

1. On dit que f est **dérivable à gauche** en $a \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on pose $f'_g(a) = \ell$.
2. On dit que f est **dérivable à droite** en $a \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell' \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on pose $f'_d(a) = \ell'$.

Remarque 3. Si f est dérivable à droite et à gauche alors f admet au point a deux demi-tangentes.

Exemple 2. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

Proposition n° 1 : lien entre être dérivable, dérivable à droite et à gauche

Soit $a \in \mathring{I}$, alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 3. Que penser de la fonction $x \mapsto |x|$?

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition n° 2 : opérations sur les fonctions dérivables (somme, produit, division)

Soient f et g dérivables sur I.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$
2. La fonction fg est dérivable sur I et $$(fg)' = f'g + fg'$$
3. Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Soit $a \in I$ et $x \notin I \backslash \{a\}$. Alors
$$\frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)}{x - a} = \frac{\lambda f(x) + g(x) - \lambda f(a) - g(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \lambda f'(a) + g'(a)$$
Ceci prouve que $\lambda f + g$ est dérivable en a et que $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$. Et ce pour tout $a \in I$, ainsi $\lambda f + g$ est dérivable en I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
2. Soit $a \in I$ et $x \notin I \backslash \{a\}$. Alors
$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) + f(a)g(a)}{x - a} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$
Or, f est dérivable en a donc continue en a, ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Ainsi par somme et produit de limite, on a $\dfrac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$. Ceci prouve que fg est dérivable en a et que $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$. Et ce pour tout $a \in I$, donc fg est dérivable sur I et $fg = fg' + gf'$.
3. Soit $a \in I$ et $x \notin I \backslash \{a\}$. Alors
$$\begin{aligned} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x - a} &= \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{\dfrac{g(a)f(x) - g(x)f(a)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\ &= \frac{g(a)\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{g(x)g(a)} - \frac{f(a)\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}{g(x)g(a)} \end{aligned}$$
Or, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$ car g est continue en a (car g dérivable en a), par produit, quotient et différences de limites :
$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$
Ceci prouve que f/g est dérivable en a et que $(f/g)'(a) = \dfrac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$. Et ce pour tout $a \in I$, ainsi f/g est dérivable sur I et $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$. ∎

Proposition n° 3 : composition de fonctions dérivables

Soient $f : I \to J$ dérivable et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Démonstration de la proposition n° 3 : Soit $a \in I$, montrons que $g \circ f$ est dérivable en a et calculons sa dérivée. Posons $b = f(a)$ et $\tau\colon \begin{cases} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si} \quad y \neq b \\ g'(b) & \text{si} \quad y = b \end{cases} \end{cases}$. Comme g est dérivable en $b \in J$, $\tau(y) \xrightarrow[y\to b]{} g'(b)$. Remarquons que pour tout $y \in J$, $g(y) - g(b) = (y-b) \times \tau(y)$. Ainsi, pour tout $x \in I \backslash \{a\}$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \tau(f(x))$$

Comme f est dérivable en a, f est continue en a donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) = b$, en composant par τ continue en b, $\tau(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \tau(b) = g'(b) = g'(f(a))$. De plus, comme f est dérivable en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$. Par produit de limites finies

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \times g'(f(a))$$

Dès lors, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$. Et ce pour tout $a \in I$, ce qui prouve que $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. ∎

Exemple 4. Soient y dérivable sur I et $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, A une primitive de a sur I. Justifier la dérivabilité et dériver $x \mapsto y(x)\mathrm{e}^{A(x)}$

Théorème n° 2 : dérivabilité de la bijection réciproque

Soit $f\colon I \to J$ une bijection. Soit $b \in J$, si f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$ et que $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $f^{-1}(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration du théorème n° 2 : Soit $y \in J \backslash \{b\}$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$

Or on sait que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$ et que $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b]{} f^{-1}(b) = a$ (par continuité de f^{-1} en b ; voir chapitre précédent). Par composition des limites, $\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \neq 0$. Comme $f'(a) \neq 0$, on en déduit que $\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}$ n'est pas nul sur un voisinage de a. En passant à l'inverse dans la limite, on obtient que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} \xrightarrow[y\to b]{} \frac{1}{f'(a)}$$

Ceci prouve que f^{-1} est dérivable en b et que $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(a)}$. ∎

Remarque 4. La pente de la tangente f^{-1} en b est l'inverse de la pente de f en a. La condition $f'(a) \neq 0$ est indispensable pour garantir que f' soit dérivable en b.

Exemple 5. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1\,;1[$ et $\arcsin'(x) = -\arccos'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour $x \in\,]-1\,;1[$, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = (1+x^2)^{-1}$.

2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Théorème n° 3 de Rolle

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a\,;b]$.
2. f est dérivable sur $]a\,;b[$.
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration du théorème n° 3 : Comme f est continue sur $[a;b]$, le théorème des bornes atteintes stipule que f est bornée et atteint ses bornes. Il existe $(m,M) \in [a;b]^2$ tel que $f([a;b]) = [f(m);f(M)]$. Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$. Il y a deux cas :

- Soit $f(m) = f(M)$, alors, pour tout $x \in [a;b]$, $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(m)$, ainsi $f(x) = f(m)$. Ainsi, f est constante. Donc, en posant $c = (a+b)/2 \in]a;b[$, $(f(x)-f(c))/(x-c) = 0 \xrightarrow[x\to c]{} 0$, donc $f'(c) = 0$.
- Soit $f(m) \neq f(M)$, alors $f(a) \neq f(m)$ ou $f(a) \neq f(M)$ (en effet, $f(a) = f(m)$ et $f(a) = f(M)$ est impossible). Supposons, par exemple, que $f(a) \neq f(m)$. Comme $f(b) = f(a) \neq f(m)$, on peut en déduire que $m \neq a$ et $m \neq b$, donc $m \in]a;b[$. Ainsi, f est dérivable en m. De plus, pour $x > m$,
$$f(x) \geqslant f(m) \quad x - m > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{f(x)-f(m)}{x-m} \geqslant 0$$
Par passage à la limite quand $x \to m^+$, $f'(m) \geqslant 0$. Pour $x < m$,
$$f(x) \geqslant f(m) \quad x - m < 0 \quad \text{donc} \quad \frac{f(x)-f(m)}{x-m} \leqslant 0$$
Par passage à la limite quand $x \to m^-$, $f'(m) \leqslant 0$. Dès lors, $f'(m) = 0$. En posant $c = m \in]a;b[$, on a $f'(c) = 0$. On procède de même si $f(a) \neq f(M)$. ■

Remarque 5. Le réel c n'est pas nécessairement unique.

Théorème n° 4 des accroissements finis

Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a;b]$.
2. f est dérivable sur $]a;b[$.

Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration du théorème n° 4 : Posons $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a)\right)$ pour $x \in [a;b]$, alors :

- g est continue sur $[a;b]$ comme somme de fonctions continues.
- g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables et
$$\forall x \in]a;b[\qquad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$$
- $g(a) = f(a) - \left(f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(a-a)\right) = 0$ et $g(b) = f(b) - \left(f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a)\right) = 0$

Appliquons le théorème de Rolle : il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Ainsi, $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = 0$. Dès lors, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$. ■

Remarque 6. Ce théorème fait le lien entre la dérivée et le taux d'accroissement sans limite. Le théorème de Rolle n'est qu'un cas particulier de ce théorème.

Exemple 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.

Corollaire : inégalité des accroissements finis

Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $M \geqslant 0$ tels que

1. f est continue sur I.
2. f est dérivable sur $\mathring{I}$.
3. $\forall x \in \mathring{I} \quad |f'(x)| \leqslant M$

Alors, pour tout $(x,x') \in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$ (f est M-lipschitzienne).

Démonstration du corollaire : Soit $(x,x') \in I^2$.

- Si $x = x'$, alors $|f(x) - f(x')| = 0 \leqslant M|x-x'|$.
- Si $x < x'$, alors f est continue sur $[x;x']$, dérivable sur $]x;x'[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x;x'[$ tel que $f'(c) = (f(x)-f(x'))/(x-x')$. Ainsi,
$$\frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|} = \left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right| = |f'(c)| \leqslant M$$
En multipliant, par $|x-y| > 0$, on obtient $|f(x)-f(x')| \leqslant M|x-x'|$.
- Si $x > x'$, idem. ■

Exemple 7. Montrer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Théorème n° 5 de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$, supposons que

1. f est continue sur I.
2. f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$.
3. $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

Alors, f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

Remarque 7. Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et admet une tangente verticale en a.

Démonstration du théorème n° 5 : Soit $x \in I \backslash \{a\}$. Alors f est continue sur $[\,a\,;x\,]$ (ou $[\,x\,;a\,]$), dérivable sur $]\,a\,;x\,[$. Par application du théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in \,]\,a\,;x\,[$ (ou $]\,x\,;a\,[$), tel que

$$f'(c(x)) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or $|c(x) - a| \leqslant |x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, par encadrement, $c(x) \xrightarrow[x \to a]{} a$. Comme $f'(y) \xrightarrow[y \to a]{} \ell$, par composition de limites,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

De plus, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, alors le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie, donc f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = \ell$. Finalement, $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell = f'(a)$, ceci prouve que f' est continue en a. ■

Exemple 8. Posons $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Applications de la dérivabilité

3.1 Extrema locaux et globaux

Définition des extrema globaux

On dit que f admet un **maximum global** en a si $f(a)$ majore f, *i.e.* : $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(a)$
On dit que f admet un **minimum global** en a si $f(a)$ minore f, *i.e* : $\forall x \in I \quad f(a) \leqslant f(x)$
On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ lorsque $f(a)$ est localement un maximum de f :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a - \delta\,; a + \delta\,] \quad f(x) \leqslant f(a)$$

On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ lorsque $f(a)$ est localement un minimum de f :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a - \delta\,; a + \delta\,] \quad f(a) \leqslant f(x)$$

Un **extremum local/global de** f est un minimum local/global ou un maximum local/global de f.

Théorème n° 6 : condition nécessaire pour admettre un extremum local

Soit f dérivable sur I. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{I}$, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration du théorème n° 6 : Supposons que f admette un maximum local en $a \in \mathring{I}$ (démonstration similaire si c'est un minimum local). Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [\,a - \delta\,; a + \delta\,]$, $f(x) \leqslant f(a)$. Soit $x \in \,]\,a\,; a + \delta\,[\, \cap I$, alors $f(x) \leqslant f(a)$ et $x > a$, ainsi $(f(x) - f(a))/(x - a) \leqslant 0$. En passant à la limite quand $x \to a^+$, $f'(a) \leqslant 0$. Soit $x \in \,]\,a - \delta\,; a\,[\, \cap I$, alors $f(x) \leqslant f(a)$ et $x < a$, ainsi $(f(x) - f(a))/(x - a) \geqslant 0$. En passant à la limite quand $x \to a^-$, $f'(a) \geqslant 0$. Donc nécessairement, $f'(a) = 0$. ■

Attention la réciproque est fausse

Penser à la fonction $x \mapsto x^3$.

Comment déterminer les extrema d'une fonction dérivable ?
En résolvant l'équation $f'(x) = 0$, on connaît les extrema locaux **possibles**. Il faut ensuite les étudier cas par cas. De plus, une extrémité de I peut fournir un extremum sans que sa dérivée soit nulle.

3.2 Application aux suites récurrentes

Théorème n° 7 : convergence des suites récurrentes vers un point fixe
Soient $f\colon I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est k-lipschitzienne sur I avec $k < 1$ et qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f). Alors, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Démonstration du théorème n° 7 : Posons $\mathscr{P}(n)$: «$|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$». Pour $n = 0$, $|u_0 - \ell| \leqslant k^0|u_0 - \ell|$ car $k^0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors comme f est k-lipschitzienne et $f(\ell) = \ell$, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell| \leqslant k \times k^n|u_0 - \ell| = k^{n+1}|u_0 - \ell|$$

Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Comme $k \in [\,0\,;1\,[$, $k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par encadrement, $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Finalement, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. ■

Exemple 9. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$

3.3 Caractérisation de la monotonie

Théorème n° 8 : caractérisation des fonctions dérivables et monotones
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f dérivable sur I.

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration du théorème n° 8 : Supposons f croissante sur I. Soit $a \in I$. Alors pour $x \in I\backslash\{a\}$, $(f(x) - f(a))/(x - a) \geqslant 0$. En effet, si $x > a$, alors comme f est croissante, $f(x) \geqslant f(a)$ et donc $f(x) - f(a) \geqslant 0$ et $x - a \geqslant 0$. Si $x < a$, alors comme f est croissante $f(x) \leqslant f(a)$ donc $f(x) - f(a) \leqslant 0$ et $x - a < 0$. Or les inégalités larges passant à la limite, on a $0 \leqslant (f(x) - f(a))/(x - a) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$. Donc $f'(a) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Alors comme f est dérivable sur I, f est continue sur I donc sur $[\,a\,;b\,]$ et f est dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geqslant 0$$

En multipliant cette inégalité par $b - a > 0$, on obtient $f(b) - f(a) \geqslant 0$, donc $f(b) \geqslant f(a)$. Ceci montre que f est croissante sur I. ■

Théorème n° 9 : caractérisation des fonctions constantes
Soit f dérivable sur un intervalle I. f est constante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Démonstration du théorème n° 9 : Supposons que f soit constante sur I. Soit $a \in I$, alors

$$\forall x \in I\backslash\{a\} \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Par unicité de la limite, $f'(a) = 0$. Et ce pour tout $a \in I$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. Soit $(a, b) \in I^2$, il y a trois cas :

- Si $a = b$ alors $f(a) = f(b)$
- Si $a < b$, alors f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ (car dérivable sur I), est dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, donc d'après le T.A.F., il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$. Dès lors, $f(b) = f(a)$.
- Si $a > b$, on montre, de même, que $f(a) = f(b)$.

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$, $f(a) = f(b)$. La fonction f est ainsi constante. ■

Attention la condition «I un intervalle de $\mathbb{R}$» est importante

La fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas constante.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante.

Théorème n° 10 : CNS pour qu'une fonction dérivable soit strictement croissante

Soit f dérivable sur I. Alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ et pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$, $f'(x) > 0$.

Démonstration du théorème n° 10 : Supposons f strictement croissante sur I, alors f est croissante sur I et donc $f' \geqslant 0$. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Montrons qu'il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f'(x) > 0$. Raisonnons par l'absurde : supposons que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f'(x) \leqslant 0$. Comme on sait que $f'(x) \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f'(x) = 0$. Ceci prouve que f est constante sur le segment $[\,a\,;b\,]$, donc $f(a) = f(b)$. Or, f est strictement croissante et $a < b$, c'est absurde.

Réciproquement, supposons que $f' \geqslant 0$ et que pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$, $f'(x) > 0$. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Supposons que $f(a) \geqslant f(b)$. Comme f est croissante sur I, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \leqslant f(a)$. Ainsi, f est constante sur $[\,a\,;b\,]$. Dès lors, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f'(x) = 0$. Ce qui est absurde. Dès lors, $f(a) < f(b)$. Par conséquent, f est strictement croissante sur I. ■

Proposition n° 4 : condition <u>suffisante</u> de stricte monotonie d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Supposons que $f' \geqslant 0$ et que pour tout $x \in I \backslash E$ (où E est un ensemble fini), $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Démonstration de la proposition n° 4 : Supposons que $f' \geqslant 0$ et que pour tout $x \in I \backslash E$, $f'(x) > 0$ Montrons que f est strictement croissante. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Alors $[\,a\,;b\,]$ est un ensemble infini et E est fini, donc il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ et $x \notin E$. Ainsi, $f'(x) > 0$. En utilisant la caractérisation des fonctions strictement croissante on en déduit que f est strictement croissante. ■

Attention : f peut être strictement croissante et f' s'annuler une infinité de fois

La fonction $x \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule une infinité de fois.

3.4 Fonctions convexes

Remarque 8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors $[\,a\,;b\,] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$.

Démonstration de la remarque 8 : Soit $x \in \{ta + (1 - t)b \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$, il existe donc $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $x = ta + (1 - t)b$. Comme $a \leqslant b$, on a que $x \leqslant tb + (1 - t)b$ et que $x \geqslant ta + (1 - t)a = a$. Ainsi, $x \in [\,a\,;b\,]$. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$, posons $t = \dfrac{b - x}{b - a}$, comme $b - x \geqslant 0$ et $b - a > 0$, on a $t \geqslant 0$. De plus $1 - t = \dfrac{x - a}{b - a} \geqslant 0$, donc $t \leqslant 1$, de plus :

$$ta + (1 - t)b = \frac{b - x}{b - a} \times a + \frac{x - a}{b - a} \times b = \frac{a(b - x) + b(x - a)}{b - a} = \frac{(b - a)x}{b - a} = x$$

Ceci démontre que $x \in \{ta + (1 - t)b \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$. Par double inclusion, $[\,a\,;b\,] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$. ■

Définition d'une fonction convexe/concave

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est convexe (resp. concave) si

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(ta + (1 - t)b) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b) \quad (\text{resp. } \geqslant)$$

Proposition n° 5 : position d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe et $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, notons g l'équation de la droite qui coupe f en a et en b, alors f est en dessous de g sur $[\,a\,;b\,]$ et au-dessus en dehors de $[\,a\,;b\,]$.

Démonstration de la proposition n° 5 : Notons que pour tout $x \in I$, $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) = \dfrac{b-x}{b-a}f(a)+\dfrac{x-a}{b-a}f(b)$.

- Soit $x \in [\,a\,;b\,]$, montrons que $f(x) \leqslant g(x)$. D'après la remarque, il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $x = ta + (1-t)b$ avec $t = \dfrac{b-x}{b-a}$, comme f est convexe,

$$f(x) = f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b) = \frac{b-x}{a-x}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = g(x)$$

- Soit $x \in I$ et $x > b$, montrons que $f(x) \geqslant g(x)$. Remarquons que $b \in [\,a\,;x\,]$, donc il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $b = ta + (1-t)x$ avec $t = \dfrac{x-b}{x-a}$, comme f est convexe, on a :

$$f(b) = f(ta+(1-t)x) \leqslant tf(a) + (1-t)f(x) = \frac{x-b}{x-a}f(a) + \frac{b-a}{x-a}f(x)$$

En isolant le terme en $f(x)$, on obtient :

$$f(x) \geqslant \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a) = g(x)$$

- Soit $x \in I$ et $x < a$, montrons que $f(x) \geqslant g(x)$. Remarquons que $a \in [\,x\,;b\,]$, donc il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $a = tx + (1-t)b$ avec $t = \dfrac{b-a}{b-x}$, comme f est convexe, on a :

$$f(a) = f(tx+(1-t)b) \leqslant tf(x) + (1-t)f(b) = \frac{b-a}{b-x}f(x) + \frac{a-x}{b-x}f(b)$$

En isolant le terme en $f(x)$, on obtient :

$$f(x) \geqslant \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a) = g(x)$$

■

Proposition n° 6 : caractérisation de la convexité à l'aide de la dérivée

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Sont équivalents :

1. f est convexe.
2. f' est croissante.
3. f est au dessus de toutes ses tangentes.

De plus, si f est deux fois dérivable, alors f est convexe ssi f'' est positive.

Démonstration de la proposition n° 6 :

- Supposons f convexe et montrons que f' est croissante. Soit $a \in I$, montrons d'abord que $\tau_a\colon x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\backslash\{a\}$. Soit $(x,y) \in (I\backslash\{a\})^2$ avec $x < y$.
  — Si $y > a$, alors $y \notin [\,a\,;x\,]$ (ou $y \notin [\,x\,;a\,]$ si $x < a$), donc $f(y)$ est au dessus de la sécante à f en a et x. Ainsi, $f(y) \geqslant f(a) + \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)$, en divisant par $y-a > 0$, il vient $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
  — Si $y < a$, alors $y \in [\,a\,;x\,]$ (ou $x \in [\,x\,;a\,]$ si $x < a$), donc $f(y)$ est en dessous de la sécante à f en a et x. $f(y) \leqslant f(a) + \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)$, en divisant par $y-a < 0$, il vient $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
  Dans tous les cas, on a montré que $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$ dès que $x < y$, ainsi, τ_a est croissante.
  Fixons maintenant deux points $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et montrons que $f'(a) \leqslant f'(b)$. Soit $x \in \,]\,a\,;b\,[$, alors par croissance de τ_a, $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(b)$, en passant à la limite quand $x \to a^+$, on obtient $f'(a) \leqslant \tau_a(b)$. De même par croissance de τ_b, on a $\tau_b(a) \leqslant \tau_b(x)$ en passant à la limite quand $x \to b^-$, on obtient, $\tau_b(a) \leqslant f'(b)$. En remarquant que $\tau_b(a) = \tau_a(b)$, on obtient $f'(a) \leqslant f'(b)$. Dès lors, f' est croissante.
- Supposons que f' croissante et montrons que f est au dessus de ses tangentes. Soit $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est l'équation de la tangente de f en a. Posons, alors, $g(x) = f(x) - (f(a) + f'(a))(x-a)$, alors g est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Alors, comme f' est croissante, $g'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant a$ et $g'(x) \leqslant x$ si $x \leqslant a$. Ainsi, g est croissante sur $I \cap [\,a\,;{+\infty}\,[$ et décroissante sur $I \cap \,]\,{-\infty}\,;a\,]$. Dès lors, pour $x \in I$, si $x \geqslant a$, alors $g(x) \geqslant g(a) = 0$ et si $x \leqslant a$, alors $g(x) \geqslant g(a) = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, donc f est au-dessus de sa tangente en a.

- Supposons que f est au dessus de ses tangentes. Montrons que f est convexe. Soient $(a,b) \in I^2$ et $t \in [0;1]$. Posons $c = ta + (1-t)b$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(c)(x-c) + f(c)$, ainsi

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geqslant t\left(f'(c)(c-a) + f(c)\right) + (1-t)\left(f'(c)(c-b) + f(c)\right) = f(c) = f(ta + (1-t)b)$$

  Dès lors, f est convexe sur I.

De plus, si f est deux fois dérivable, alors f'' est positive ssi f' est croissante ssi f est convexe. ■

Remarque 9. Les deux propositions précédentes se généralisent au cas où f est concave.

Inégalités classiques

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geqslant 1 + x$
- $\forall x > 0 \quad \ln(x) \leqslant x - 1$
- $\forall x \in [0;\pi/2] \quad 2x/\pi \leqslant \sin(x) \leqslant x$

4 Dérivées successives et fonctions de classes $\mathscr{C}^k$

Définition des dérivées successives

1. On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I puis que f' est dérivable sur I.
   On appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de sa dérivée : $f^{(2)} = (f')'$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est n **fois dérivable** sur I si f est $n-1$ fois dérivable et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.
   On appelle **dérivée n-ième** (ou **d'ordre** n) de f : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Par convention, $f^{(0)} = f$ et et $f^{(1)} = f'$.
3. On dit que f est **infiniment dérivable** sur I si f admet des dérivées à tout ordre.

Attention aux notations

Ne pas confondre f^n et $f^{(n)}$: la première notation indique une puissance n-ième, la seconde une dérivée n-ième.

Exemple 10. Calculer les dérivées successives de cos, de $x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, ainsi que de la fonction $x \mapsto x^{-1}$.

Démonstration du calcul de la dérive de $x \mapsto x^n$: Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $f\colon x \mapsto x^n$. Posons $\mathscr{P}(k)$: «f est k fois dérivable et $f^{(k)}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$.

- Pour $k = 0$, f est 0 fois dérivable, et $f^{(0)} = f\colon x \mapsto x^n = \dfrac{n!}{(n-0)!}x^{n-0}$ avec $0 \leqslant n$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons, $\mathscr{P}(k)$ vérifiée et montrons $\mathscr{P}(k+1)$, distinguons trois cas :
  — Si $k < n$, alors f est k fois dérivable et $f^{(k)}\colon x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. Observons que $f^{(k)}$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f^{(k)})'(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)}(n-k)x^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}x^{n-(k+1)}$$

  Ainsi, f est bien $k+1$ fois dérivable, comme $k < n$, $k+1 \leqslant n$.
  — Si $k = n$, alors f est k fois dérivable, et $f^{(k)}\colon x \mapsto n!$. Cette application constante est bien dérivable de dérivée nulle, ainsi, f est dérivable $k+1$ fois et $f^{(k+1)}\colon x \mapsto 0$ avec $k+1 > n$.
  — Si $k > n$, alors f est k fois dérivable et $f^{(k)}\colon x \mapsto 0$ est dérivable de dérivée nulle, ainsi, $f^{(k+1)}\colon x \mapsto 0$ avec $k+1 > n$.

  Dans tous les cas, f est $k+1$ fois dérivable et $f^{(k+1)}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-(k+1))!}x^{n-(k+1)} & \text{si} \quad k+1 \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k+1 > n \end{cases}$. Ceci prouve que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. ■

Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

1. On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)} \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathscr{C}^n$.
   On note $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Exemple 11. La fonction exponentielle et les fonctions polynomiales sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 10. Pour une fonction f et $n > p > 2$

$$\begin{array}{rcl} f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) & \iff & f \text{ infiniment dérivable} \implies f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \implies f\ n\text{-fois dérivable} \\ f\ n\text{-fois dérivable} & \implies & f \in \mathscr{C}^p(I,\mathbb{R}) \implies f\ p\text{-fois dérivable} \implies f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \\ f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) & \implies & f \text{ 2-fois dérivable} \implies f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \implies f \text{ dérivable} \implies f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) \end{array}$$

Mais toutes les implications réciproques sont fausses (sauf la première).

Proposition n° 7 opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.
2. La fonction $fg \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\quad (fg)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \times g^{(n-i)} \quad$ formule de Leibniz
3. Si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.
4. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})^2$ alors $(\lambda f + g, fg, f/g) \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})^3$ (si g ne s'annule pas sur I pour f/g).

Remarque 11. La proposition précédente peut aussi s'énoncer en remplaçant de classe $\mathscr{C}^n$ par n-fois dérivable.

Démonstration de la proposition n° 7 :

1. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «si $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$ alors $\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$».
   - Pour $n = 1$, si $(f,g) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, alors f et g sont dérivables donc $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$, or f' et g' sont continues, donc d'après le chapitre «Continuité», $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ est continue sur I. Donc, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, alors $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$. D'après $\mathscr{P}(n)$, $(\lambda f + g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$. Par hypothèse sur f et g, $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi, d'après $\mathscr{P}(1)$, $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :
   $$((\lambda f + g)^{(n)})' = (\lambda f^{(n)} + g^{(n)})' = \lambda (f^{(n)})' + (g^{(n)})' = \lambda f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$$
   Or $((\lambda f + g)^{(n)})' = (\lambda f + g)^{(n+1)}$. Ceci prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
2. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «si $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$ alors $fg \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$».
   - Pour $n = 1$, si $(f,g) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, alors f et g sont dérivables donc fg est dérivable sur I. De plus,
   $$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1-0)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0-0)} = fg' + f'g = (fg)'$$
   Or f,f', g et g' sont continues, donc d'après le chapitre «Continuité», $(fg)' = fg' + f'g$ est continue sur I. Dès lors, $fg \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})^2$, alors $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$. D'après $\mathscr{P}(n)$, $fg \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Comme $(f,g) \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})^2$, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Par produit et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de plus :

$$\begin{aligned}
((fg)^{(n)})' &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-k)} + f^{(k)}\left(g^{(n-k)}\right)'\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&\underset{i=k+1}{=} \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1} f^{(i)}g^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1} f^{(i)}g^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)}g^{(0)} + f^{(0)}g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g^{(0)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)}g^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$, si g ne s'annule pas sur I, alors $f/g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$».
   - Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors f/g est dérivable et $(f/g)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^{(n+1)}(I,\mathbb{R})^2$ avec g ne s'annulant pas sur I. Alors $(f/g)' = \tilde{f}/\tilde{g}$ avec $\tilde{f} = f'g - g'f$ et $\tilde{g} = g^2$. On remarque que, par produit et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $(\tilde{f},\tilde{g}) \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})^2$ et que $\tilde{g}$ ne s'annule pas sur I. Par hypothèse de récurrence appliquée à $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, $(f/g)' = \tilde{f}/\tilde{g} \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$. Finalement $f/g \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
4. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})^2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f, g sont de classe $\mathscr{C}^n$. Donc par les points précédents, $\lambda f + g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas) sont de classe $\mathscr{C}^n$. Et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. ■

Exemple 12. Calculer la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f\colon x \mapsto x^3 \mathrm{e}^x$.

Exemple classique de fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie par raccordement

Soit f la fonction valant 0 sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}}$.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Proposition n° 8 : classe de la composée et de la bijection réciproque *(admis)*

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathscr{C}^k(I,J)$ et $g \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$. Alors, $g \circ f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$.
Si f est bijective et si f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J,I)$.

Exemple 13. Les fonctions arccos et arcsin sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$, arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

5 Extension aux fonctions à valeurs complexes

5.1 Définition de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes

Définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{C}$. On pose alors $f'(a) = \ell$. On dit que f est dérivable sur I ssi pour tout $a \in I$, f est dérivable en a.

Remarque 12. f est dérivable en $a \in I$ ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. Alors, $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(f)'(a)$.

Remarque 13. On ne sait pas dériver une fonction définie sur $\mathbb{C}$, seulement *à valeurs* dans $\mathbb{C}$.

5.2 Ce qui est encore valable

- On peut toujours parler de dérivabilité à gauche et à droite.
- On peut toujours additionner, multiplier et diviser des fonctions dérivables.
- Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.
- Pour la composée : si $f \in \mathscr{C}^k(I,J)$ et $g \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{C})$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{C})$.
- La formule de Leibniz est encore vraie.
- **L'inégalité des accroissements finis est encore vraie**[1].
- Une fonction, définie sur un intervalle, est constante si et seulement si elle a une dérivée nulle.

5.3 Ce qui n'est plus valable

- La notion d'extremum local n'a pas de sens.
- **Le théorème de Rolle ne s'applique pas, tout comme l'égalité des accroissements finis**.
- La notion de monotonie n'a pas de sens.

Exemple le théorème de Rolle ne s'applique pas

La fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ est continue sur $[\,0\,;2\pi\,]$, dérivable sur $]\,0\,;2\pi\,[$, $f(0) = f(2\pi)$. Mais, f' ne s'annule pas.

6 Méthodes

Comment montrer qu'une fonction est dérivable et la dériver ?

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si f est une somme/produit/composée/quotient de fonctions dérivables alors conclure que f est dérivable (attention aux intervalles dans le cas de la composée, attention à bien dire que le dénominateur ne s'annule pas dans le cas du quotient) puis dériver f grâce aux formules.
- Si on est en point particulier a (un point de raccordement ou un point où il y a une valeur absolue ou une racine carrée d'une expression qui s'annule par exemple) :
  — Dériver à droite et à gauche (si possible) et regarder s'il y a la même dérivée.
  — Étudier si le taux d'accroissement admet une limite finie en a, dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
  — Appliquer le théorème de la limite de la dérivée, dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

1. Si $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$, et $|f'|$ bornée par M, alors pour tout $(x,x') \in I^2$, $|f(x)-f(x')| \leqslant M|x-x'|$. Ceci sera démontré lors du chapitre Intégration.