Chapitre 12
Espaces vectoriels

Objectifs :
Définir la notion d'espaces vectoriels. À la façon de monsieur Jourdain, vous utilisiez déjà des exemples espaces vectoriels sans le savoir. L'étude de la notion d'espace vectoriel permet d'étudier tous ces exemples en même temps.
Prérequis :
- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes

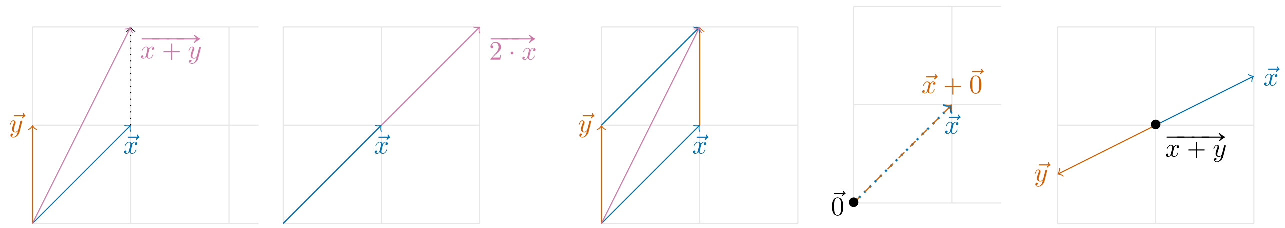
Table des matières

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier non nul.

1 Définition des espaces vectoriels

Avant de donner la définition d'un espace vectoriel, étudions quelques exemples :

1. Soient deux n-uplets de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on les somme : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. On multiplie aussi x par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$



(a) $(1,1) + (0,1) = (1,2)$ (b) $2 \cdot (1,1) = (2,2)$ (c) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (d) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (e) Il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$

FIGURE 1 – Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ représentés avec des flèches. Et quelques propriétés sur les vecteurs.

2. De même, étant donnés deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$.
3. Soient deux fonctions $(f, g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f + g : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda f : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$
4. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans la suite, la notion d'espace vectoriel généralise ces exemples. Ainsi, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ etc. seront des espaces vectoriels, les éléments de ces ensembles seront appelés des vecteurs. Contrairement au lycée, nous n'utiliserons pas de flèches au dessus des vecteurs, sauf pour les schémas.

Définition d'un espace vectoriel

On appelle **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ vérifiant :

1. L'**addition** dite **interne** $+ : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases}$ satisfaisant :
   (a) $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y = y + x$ (l'addition de vecteurs est commutative)
   (b) $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (l'addition de vecteurs est associative)
   (c) $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + 0_E = x$ (il existe un vecteur nul noté 0_E)
   (d) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$ (tout vecteur x admet un vecteur opposé y).
2. La **multiplication** dite **externe** $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$ satisfaisant :
   (a) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$ (multiplier un vecteur par 1 ne change pas le vecteur)
   (b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (pseudo-associativité)
   (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$)
   (d) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributivité de $\cdot$ par rapport $+$)

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs** de E, 0_E est appelé **vecteur nul** de E.

Remarque 2. Voilà une définition particulièrement rebutante. L'important est surtout de comprendre ce que ça veut dire. Que faites-vous avec des vecteurs ? Les additionner ensemble, et les multiplier par un scalaire. Cette définition n'est que la formalisation de cette idée avec tout un tas d'exigences raisonnables, par exemple :

- Le point 1a exige seulement que lorsqu'on ajoute deux vecteurs l'ordre n'intervient pas.
- Le point 1c exige juste qu'il existe un vecteur nul.

Exemples classiques d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

I. $\mathbb{K}^n$ (i.e. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel), $\mathbb{C}^n$ est un aussi $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II. $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{C}[X]$ est un un $\mathbb{R}$-EV).

III. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$)

IV. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$)

V. $\mathbb{K}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$)

VI. $E^{\Omega} = \mathscr{F}(\Omega, E)$ (ensemble des fonctions de Ω un ensemble quelconque vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E)

Démonstration (partielle) que ce sont des espaces vectoriels :

I. Si $E = \mathbb{K}^n$, alors les applications suivantes sont bien définies :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

1. Fixons $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ trois éléments de $\mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
   (a) $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$
   (b)
   $$\begin{aligned} (x+y)+z &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + z \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = x + (y+z) \end{aligned}$$
   (c) Posons $z = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, alors $x + z = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = x$, z est bien un vecteur nul.
   (d) Posons $m = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x + m = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, 0, \dots, 0) = z$.
2. (a) $1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$
   (b) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \lambda \cdot (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda\mu x_1, \dots, \lambda\mu x_n) = (\lambda\mu)(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
   (c) $\lambda \cdot x + \mu \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n)$
   $= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) = (\lambda + \mu)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda + \mu)x$
   (d) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda x + \lambda y$

Ceci montre que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Appliqué à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient que $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Appliqué à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on obtient que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $E = \mathbb{C}^n$, alors, on peut de même définir les applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Or, on a huit propriétés qui sont vraies dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, si on restreint ces propriétés en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, elles encore encore vraies faisant de $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, car dans $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. Si $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}$. De plus, $P + Q = Q + P$, $(P + Q) + R = P(Q + R)$, $P + 0 = P$, $P + (-1)P = 0$, $1 \cdot P = P$, $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$, $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$ et $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$. Toutes ces propriétés ont déjà été énoncées et démontrées dans le chapitre sur les polynômes.

III. Si $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(A, B) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. De plus, on sait que $A + 0_{n,p} = A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + B = B + A$, $A + (-1) \cdot A = 0_{n,p}$, $1 \cdot A$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$. Toutes ces propriétés ont déjà été énoncées et démontrées dans le chapitre sur les matrices.

IV. Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors on peut définir les applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Et on vérifie que les 8 propriétés sont vérifiées. Ce qui fait que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-EV. Par exemple, si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 0$, alors $(u_n)_n + (w_n)_n = (u_n + w_n)_n = (u_n)_n$. Ainsi, $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ (la suite nulle) est bien l'élément neutre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (les autres points seront vérifiées dans le dernier exemple qui généralise celui-ci).

V. Si $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, alors on définit deux applications :

$$\begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \times \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \\ \qquad (f,g) \qquad \longmapsto f+g \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \\ \quad (\lambda, f) \quad \longmapsto \lambda f \colon x \mapsto \lambda \times f(x) \end{cases}$$

Avec $f+g\colon x \mapsto f(x)+g(x)$ et $\lambda f\colon x \mapsto \lambda \times f(x)$. On vérifie facilement les 8 propriétés, par exemple, si on pose $\Theta\colon x \mapsto 0$, alors $\Theta \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (application nulle) alors $f+\Theta\colon x \mapsto f(x)+0 = f(x)$, donc $f+\Theta = f$. Ainsi, Θ est le vecteur nul de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (les autres points seront vérifiées dans le dernier exemple qui généralise celui-ci).

VI. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors on définit deux applications :

$$+\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\Omega,E) \times \mathscr{F}(\Omega,E) \longrightarrow \mathscr{F}(\Omega,E) \\ \qquad (f,g) \qquad \longmapsto f+g \end{cases} \qquad \cdot\colon \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathscr{F}(\Omega,E) \longrightarrow \mathscr{F}(\Omega,E) \\ \quad (\lambda,f) \quad \longmapsto \lambda \cdot f \end{cases}$$

Avec $f+g\colon x \mapsto f(x)+g(x)$ et $\lambda \cdot f\colon x \mapsto \lambda \cdot f(x)$.

1. Soit $(f,g,h) \in \mathscr{F}(\Omega,E)^3$
   (a) Pour tout $x \in \Omega$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$. Ainsi, $f+g = g+f$.
   (b) Pour tout $x \in \Omega$,
   $$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$
   Ainsi, $(f+g)+h = f+(g+h)$.
   (c) Posons $\Theta\colon \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ x \longmapsto 0_E \end{cases}$, alors pour tout $x \in E$, $(f+\Theta)(x) = f(x)+\Theta(x) = f(x)+0_E = f(x)$. Ainsi, $f+\Theta = f$.
   (d) Soit $x \in \Omega$, alors comme $f(x) \in E$, il existe un vecteur $\tilde{f}(x) \in E$ tel que $f(x)+\tilde{f}(x) = 0_E$. En posant $\tilde{f}\colon \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ x \longmapsto \tilde{f}(x) \end{cases}$, on obtient que $f+\tilde{f} = \Theta$.
2. Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(\Omega,E)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$
   (a) Pour tout $x \in \Omega$, $(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$. Ainsi, $1\cdot f = f$.
   (b) Pour tout $x \in \Omega$, $(\lambda\cdot(\mu\cdot f))(x) = \lambda\cdot((\mu f)(x)) = \lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) = (\lambda\times\mu)\cdot f(x) = ((\lambda\times\mu)\cdot f)(x)$. Ainsi, $\lambda\cdot(\mu\cdot f) = (\lambda\times\mu)\cdot f$.
   (c) Pour tout $x \in \Omega$,
   $$((\lambda+\mu)\cdot f)(x) = (\lambda+\mu)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(x) = (\lambda\cdot f)(x)+(\mu\cdot f)(x) = (\lambda\cdot f+\mu\cdot f)(x)$$
   Ainsi, $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f+\mu\cdot f$.
   (d) Pour tout $x \in \Omega$,
   $$(\lambda\cdot(f+g))(x) = \lambda\cdot((f+g)(x)) = \lambda\cdot(f(x)+g(x)) = \lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x) = (\lambda\cdot f)(x)+(\lambda\cdot g)(x) = (\lambda\cdot f+\lambda\cdot g)(x)$$
   Ainsi, $\lambda\cdot(f+g) = \lambda\cdot f+\lambda\cdot g$.

Par conséquent, $\mathscr{F}(\Omega,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Remarque 3. Les vecteurs peuvent donc être des polynômes, des matrices, des suites, des fonctions etc.

Péril imminent : à l'impossible nul n'est tenu

Si on a deux vecteurs d'un espace vectoriel, on peut les additionner mais pas les multiplier entre eux.

«*Et je vais devoir appliquer cette définition à chaque fois que je dois montrer qu'un machin est un espace vectoriel ?*» Rassurez-vous, vous ne l'utiliserez quasiment jamais. Dans la pratique, on montre que des ensembles sont bien des espaces vectoriels en vérifiant quelque chose de bien plus simple que l'on va voir au plus vite.

À partir de maintenant E désignera toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition n° 1 : premières propriétés d'un espace vectoriel

1. On a unicité du vecteur 0_E au point 1c.
2. $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E \quad (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\cdot x = 0_E$
3. Pour tout x, on a unicité du vecteur y au point 1d, de plus $y = (-1)\cdot x$.

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. Supposons qu'il y ait deux vecteurs nuls 0_E et $0'_E$. Cela veut dire que :
$$\begin{aligned} \forall x \in E \qquad x + 0_E &= x \qquad (1)\\ \forall x \in E \qquad x + 0'_E &= x \qquad (2)\end{aligned}$$
Alors $0_E \underset{(2)}{=} 0_E + 0'_E \underset{1a}{=} 0'_E + 0_E \underset{(1)}{=} 0'_E$. On a donc montré que $0_E = 0'_E$, donc l'unicité du vecteur nul.
2. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour montrer l'équivalence, procédons par double implications :
   - Supposons $x = 0_E$ ou $\lambda = 0$ et montrons $\lambda \cdot x = 0_E$. Il y a donc deux cas $x = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
     — Cas 1 : $\lambda = 0$. Alors $\lambda \cdot x = 0 \cdot x = (0+0) \cdot x \underset{2c}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$. On a donc $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Notons $y \in E$ un vecteur tel que $(0 \cdot x) + y = 0_E$ (y existe d'après 1d). En ajoutant y des deux côtés, on obtient
     $$0_E = 0 \cdot x + y = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + y \underset{1b}{=} 0 \cdot x + (0 \cdot x + y) = 0 \cdot x + 0_E \underset{1c}{=} 0 \cdot x$$
     On a donc $0 \cdot x = 0_E$, soit $\lambda \cdot x = 0_E$.
     — Cas 2 : $x = 0_E$. Alors $\lambda \cdot x = \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) \underset{2d}{=} \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. On a donc $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$. Notons $y \in E$ un vecteur tel que $\lambda \cdot 0_E + y = 0_E$ (y existe d'après 1d). En ajoutant y des deux côtés, on obtient donc
     $$0_E = \lambda \cdot 0_E + y = (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + y \underset{1b}{=} \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + y) = \lambda \cdot 0_E + 0_E \underset{1c}{=} \lambda \cdot 0_E$$
     On a donc $\lambda \cdot 0_E = 0_E$, soit $\lambda \cdot x = 0_E$.
     Dans les deux cas, on a montré que $\lambda \cdot x = 0_E$.
   - Supposons $\lambda \cdot x = 0_E$ et montrons $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$. Il y a deux cas :
     — Soit $\lambda = 0$ et donc c'est ce qu'on veut.
     — Soit $\lambda \neq 0$, dans ce cas, on peut multiplier l'équation $\lambda \cdot x = 0_E$ des deux côtés par $\dfrac{1}{\lambda}$, on a alors $\dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \dfrac{1}{\lambda} 0_E$. Donc $\left(\dfrac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = 0_E$. Donc $1 \cdot x = 0_E$, soit $x = 0_E$.
     Ainsi, $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
3. Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $x + y = 0_E$ et $y' \in E$ tel que $x + y' = 0_E$, alors
$$y = y + 0_E = y + (x + y') \underset{1b}{=} (y + x) + y' = 0_E + y' \underset{1a}{=} y' + 0_E \underset{1c}{=} y'$$
On a donc prouvé que $y = y'$. Montrons que $y = (-1) \cdot x$:
$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$$
Par unicité de l'opposé, on a donc $y = (-1) \cdot x$. ■

2 Sous-espaces vectoriels

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si : $0_E \in F$, $\qquad \forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$

Proposition n° 2 : un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F est lui-même un espace vectoriel.

Démonstration de la proposition n° 2 : Si F est un sous-espace vectoriel, alors pour tout x et y, on a $1 \cdot x + y \in F$ (en utilisant $\lambda = 1$), de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + 0_E = \lambda x \in F$ (en utilisant $y = 0_E \in F$). On peut ainsi définir les applications suivantes : $+ : \begin{cases} F \times F \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases}$ et $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times F \longrightarrow F \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$. Il reste à vérifier les 8 propriétés :

1. Soit $(x, y, z) \in F^3$
   (a) Comme $x \in E$ et $y \in E$, $x + y = y + x$ (car E est un espace vectoriel).
   (b) Comme $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (car E est un espace vectoriel).
   (c) Par définition du vecteur nul, $x + 0_E = x$ avec $0_E \in F$. Ainsi, F admet bien un vecteur nul (le même que celui de E).
   (d) En prenant $y = 0_E$ et $\lambda = -1$, on obtient que $\lambda \cdot x + y = (-1) \cdot x \in F$. Or, d'après la proposition 1, $x + (-1)x = 0_E$. Ainsi, x admet bien un opposé dans F (et c'est le même opposé que l'opposé de x dans E).

2. Soient $(x,y) \in F^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$
   (a) Comme $x \in E$, $1 \cdot x = x$ (car E est un espace vectoriel).
   (b) Comme $x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (car E est un espace vectoriel).
   (c) Comme $x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (car E est un espace vectoriel).
   (d) Comme $x \in E$ et $y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (car E est un espace vectoriel).

Par conséquent, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Exemple 1. Montrer que F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$
3. E quelconque et $F = \{0_E\}$ et $F' = E$
4. $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$
5. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $F' = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
6. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et F l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$

Démonstration de l'exemple 1 :

1.
   - $F \subset E$.
   - Posons $x = y = z = 0$ de sorte que $x + y + z = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$.
   - Soient $u = (x,y,z) \in F$ et $v = (x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons
   $$w = \lambda u + v = \lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x',y',z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (x'',y'',z'')$$
   Avec $x'' = \lambda x + x'$, $y'' = \lambda y + y'$ et $\lambda z + z'$. Alors $x'' + y'' + z'' = \lambda(x+y+z) + (x'+y'+z') = \lambda 0 + 0 = 0$ Donc $\lambda u + v \in F$.

   Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2.
   - Notons que $F \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
   - Posons $a = b = c = 0$ de sorte que $0_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in F$.
   - Soit $(M,N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe alors $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et il existe $(a',b',c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$. Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $\alpha = \lambda a + a' \in \mathbb{C}$, $\beta = \lambda b + b' \in \mathbb{C}$ et $\gamma = \lambda c + c' \in \mathbb{C}$, on obtient $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in F$.

   Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
3.
   - Si $F = \{0_E\}$, alors comme $0_E \in E$, $F \subset E$. De plus, $0_E \in F$. Soit $(x,y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y = \lambda \cdot 0_E + 0_E = 0_E \in F$. Ainsi, $F = \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Si $F' = E$, alors $F' \subset E$, $0_E \in E = F'$. Soit $(x,y,\lambda) \in F' \times F' \times \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y \in E = F'$. Ainsi, $F' = E$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. $\mathbb{K}_n[x] \subset \mathbb{K}[X]$, $d^\circ 0 = -\infty \leqslant n$ donc $0 \in \mathbb{K}_n[X]$. Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
   $$d^\circ(\lambda P + Q) \leqslant \max(d^\circ \lambda P, d^\circ Q) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ Q) \leqslant \max(n,n) = n$$
   Ainsi, $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
5.
   - $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Comme ${0_n}^\top = 0_n$, $0_n \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $(S,S') \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda S + S' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: $(\lambda S + S')^\top = \lambda S^\top + {S'}^\top = \lambda S + S'$. Ainsi, $\lambda S + S' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Dès lors, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   De même $F' = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme ${0_n}^\top = 0_n = -0_n$, $0_n \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A,A') \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda A + A' \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: $(\lambda A + A')^\top = \lambda A^\top + {A'}^\top = \lambda(-A) + (-A') = -(\lambda A + A')$. Ainsi, $\lambda A + A' \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Dès lors, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $F = \{y \in E \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0\}$, alors $F \subset E$, notons $\theta : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$, θ est deux fois dérivable et $\theta'' + \theta = \theta$, donc $\theta \in F$. Soient $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est deux fois dérivables (car f et g le sont), et
   $$(\lambda f + g)'' + \lambda f + g = \lambda f'' + g'' + \lambda f + g = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = \lambda\theta + \theta = \theta$$
   De sorte que $\lambda f + g \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

   Remarquons que par résolution d'une équation différentielle : $F = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$. ■

Exemple 2. Les exemples suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. La droite passant par les points $(1,2)$ et $(0,1)$
2. $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Démonstration de l'exemple 2 :

1. La droite passant par les points $(1,2)$ et $(0,1)$ a pour equation $x \mapsto 1+x$. Ainsi, en notant $D = \{(x, 1+x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $(0,0) \notin D$, ainsi D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Notons $F = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, alors certes $F \subset \mathbb{R}^2$ et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Mais, $v = (\pi/2, 1) \in F$ (prendre $x = \pi/2$)), mais $2v = (\pi, 2) + (0,0) \notin F$ (en effet dans le cas contraire, il existerait $x \in \mathbb{R}$, tel que $(\pi, 2) = (x, \sin(x))$, or $\sin(x) < 2$ ce qui est absurde). Ainsi, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. ∎

Remarque 4. Si F est un SEV de E, et que $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in F^n$, et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$.

Proposition n° 3 : intersection de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est alors un sous-espace vectoriel de E.
De même, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de SEVs de E, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E.

Démonstration de la proposition n° 3 : Comme F et G sont deux SEV de E, $0_E \in F$ et $0_E \in G$, ainsi $0_E \in F \cap G$. Soient $(x, y) \in F \cap G^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors x et y sont dans F, comme F est un SEV de E, $\lambda x + y \in F$. De même, $\lambda x + y \in G$. Dès lors, $\lambda x + y \in F \cap G$.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de SEV de E. Considérons x et y appartenant à $\bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $i \in I$, x et y appartiennent à F_i, comme F_i est un SEV de E, $0_E \in F_i$ et $\lambda x + y \in F_i$ et ce pour tout $i \in I$, Par conséquent, $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Donc, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E. ∎

Exemple 3. On note $F = \left\{(x, y, y) \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, puis calculer leur intersection.

Démonstration de l'exemple 3 :

- $F \subset \mathbb{R}^3$, en posant $x = y = 0$, on obtient que $(x, y, y) = (0,0,0) \in F$. Soit $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $u \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (a, b, b)$ et comme $v \in F$, il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = (a', b', b')$, alors
$$\lambda u + v = \lambda(a, b, b) + (a', b', b') = (\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda b + b') \in F$$
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $G \subset \mathbb{R}^3$, en posant $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, alors comme $x + 2y + z = 0 + 2 \times 0 + 0 = 0$, on a que $(0,0,0) \in G$. Soient $u = (x, y, z) \in G$, $v = (x', y', z') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$, de plus :
$$\lambda x + x' + 2(\lambda y + y') + \lambda z + z' = \lambda(x + 2y + z) + (x' + y' + z') = \lambda \times 0 + 0 = 0$$
Ainsi, $\lambda u + v \in G$. Dès lors, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :
$$u \in F \cap G \iff u \in F \text{ et } u \in G \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x + 2y + z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & -3z \end{array}\right. \iff u = (-3z, z, z)$$
Ainsi, $F \cap G = \{(-3z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Attention l'union de deux SEV de E n'est pas, en général, un SEV de E.

Par exemple, $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, $F \cup G$ est-il un SEV de $\mathbb{R}^2$?

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré

Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace vectoriel engendré

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est **une combinaison linéaire** de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
- On appelle **espace vectoriel engendré** par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On note $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ cet ensemble :

$$\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ x \in E \mid \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exemple 4. Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner plusieurs vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, 2, 2)$.

Remarque 5. $x \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Exemple 5. Si $e_1 \neq 0_E$ $\operatorname{vect}(e_1)$ est une droite vectorielle de E. Si e_1 et e_2 sont non nuls et que e_2 n'est pas colinéaire à e_1, alors $\operatorname{vect}(e_1, e_2)$ est un plan vectoriel.

Exemple 6. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, déterminer $\operatorname{vect}(1, X)$.

Proposition n° 4 : l'espace engendré est un espace vectoriel

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E et $F = \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1. F est un SEV de E.
2. Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $e_i \in F$.
3. F est le plus petit SEV de E (au sens de l'inclusion) à contenir tous les e_i pour $i \in [\![1 ; n]\!]$:
   Si H est un sous-espace vectoriel qui contient tous les e_i, alors $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$.

Démonstration de la proposition n° 4 :

1. - $F \subset E$ (ensemble défini par compréhension)
   - Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, posons $\lambda_i = 0$: Ainsi, $0_E = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda e_i$ est une combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, dès lors $0_E \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
   - Soient $(x, y) \in (\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n))^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ Alors :

   $$\alpha x + y = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \mu_i) e_i \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

   Ceci prouve que $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un SEV de E.
2. Si $j \in [\![1 ; n]\!]$, alors $e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Ainsi, $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un SEV de E qui contient tous les e_i.
3. Montrons que c'est le plus petit SEV de E, au sens de l'inclusion, qui contient tous les e_i. Soit H un SEV de E qui contient tous les e_i. Montrons que $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. Soit $x \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Or, $e_i \in H$, et H est un SEV de E, ainsi, par combinaison linéaire, $x \in H$. Ainsi, $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. Par conséquent, pour tout H, SEV de E qui contient les e_i, on a $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. ∎

Remarque 6. Pour montrer que F est un SEV de E, il suffit de trouver des $e_i \in E$ tel que $F = \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemple 7.

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $F = \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration de l'exemple 7 :

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,
$$\mathrm{vect}(A,B,C) = \{aA + bB + cC \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\} = F$$
est un SEV de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. $F = \left\{ x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ A\cos + B\sin \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{vect}(\cos, \sin)$ est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. ∎

Remarque 7. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$, si $e_i \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$, alors $\mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$.

4 Somme de deux sous-espaces vectoriels et supplémentaires

Définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la **somme** de F et G par :
$$F + G = \{f + g \quad \text{où} \quad f \in F\ g \in G\} = \{y \in E \quad \text{tel que} \quad \exists (f,g) \in F \times G \text{ vérifiant } y = f + g\}$$
De plus, on dit que la somme est **directe** si f et g sont uniques : on note, dans ce cas-là, la somme $F \oplus G$.
$$\text{La somme } F + G \text{ est directe} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall y \in F + G \quad \exists! (f,g) \in F \times G \text{ tel que } y = f + g$$

Remarque 8. Ainsi, pour $x \in E$, on a $x \in F + G$ ssi il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f + g$.

Exemple 8. Pour $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{vect}((1,0))$, $G = \mathrm{vect}((0,1))$. Que vaut $F + G$? La somme est-elle directe ?

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}[X]$, on note $F = \mathrm{vect}(1, X^2)$ et $G = \mathrm{vect}(X)$. Que vaut $F + G$? La somme est-elle directe ?

Proposition n° 5 : propriétés de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on a les propriétés suivantes :
1. L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E
2. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.
3. L'ensemble $F + G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) SEV de E à contenir F et G.

Démonstration de la proposition n° 5 :

1.
   - $F + G \subset E$ (ensemble défini par compréhension)
   - $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$.
   - Soient $x \in F + G$ et $y \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ et il existe $(f', g') \in F \times G$ tel que $y = f' + g'$ alors $\alpha x + y = \alpha(f + g) + (f' + g') = \underbrace{\alpha f + f'}_{\in F} + \underbrace{\alpha g + g'}_{\in G} \in F + G$.

   Par conséquent, $F + G$ est un SEV de E.
2. Soit $f \in F$, alors $f = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$, donc $F \subset F + G$. De même, $G \subset F + G$. Ainsi, $F + G$ est un SEV de E qui contient F et G.
3. Montrons que c'est le plus petit : soit H un SEV de E qui contient F et G, vérifions que $F + G \subset H$. Soit $x \in F + G$, alors il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. Comme $f \in F \subset H$, $f \in H$, de même, $g \in H$, comme H est un SEV, $x \in H$. Dès lors, $F + G \subset H$. Et ce, pour tout H SEV de E contenant F et G. ∎

Proposition n° 6 : caractérisation de la somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Sont équivalents :
1. $F \oplus G$
2. $\forall (f,g) \in F \times G \quad f + g = 0_E \Longrightarrow f = g = 0_E$
3. $F \cap G = \{0_E\}$ (le plus utilisé pour montrer $F \oplus G$)

Démonstration de la proposition n° 6 :

$1 \Longrightarrow 2$ Supposons $F \oplus G$. Soit $(f, g) \in F \times G$, supposons que $f + g = 0_E$, ainsi, $f + g = 0_E + 0_E$, avec f et 0_E appartenant à F et g et 0_E à G, par unicité de la décomposition d'un vecteur de $F + G$, on a $f = 0_E$ et $g = 0_E$.

$2 \Longrightarrow 3$ Supposons pour tout $(f, g) \in F \times G$, $f + g = 0_E$ implique que $f = g = 0_E$. Soit $x \in F \cap G$, alors $x + (-x) = 0_E$, avec $x \in F$ et $-x \in G$ (car $x \in G$), par hypothèse, $x = -x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$, comme $0_E \in F \cap G$, l'inclusion réciproque est vérifiée.

$3 \Longrightarrow 1$ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que $F \oplus G$. Soit $y \in F + G$. Il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$. Supposons qu'il existe $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in F \times G$ tel que $y = \tilde{f} + \tilde{g}$, alors $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$ donc $f - \tilde{f} = \tilde{g} - g \in F \cap G$ Donc $f - \tilde{f} = \tilde{g} - g = 0_E$, donc $f = \tilde{f}$ et $g = \tilde{g}$. Ceci montre que $F \oplus G$. ■

Exemple 10. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe.

Démonstration de l'exemple 10 : À l'exemple 1, on a montré que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc $M^\top = M = -M$. Donc $2M = 0_n$, d'où $M = 0_n$. Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0_n\}$. Comme ce sont des SEV, l'inclusion réciproque est vraie. Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$. On peut donc en conclure que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. ■

Définition d'un supplémentaire

Soient F et G deux SEV de E. On dit que G est un **supplémentaire** de F si $F \oplus G$ et si $E = F + G$. On note dans ce cas, $E = F \oplus G$. On dit également que F et G sont **supplémentaires** dans E.

Autrement dit :
$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad \exists!(f, g) \in F \times G \quad x = f + g$$

Remarque 9. Si $E = F \oplus G$ et $x \in E$, alors il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. On dit que f est la projection de x sur F parallèlement à G. On note $p_F(x) = f$.

L'ensemble des matrices symétriques et celui des antisymétriques sont supplémentaires

Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont supplémentaires

Soient P (resp. I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $E = P \oplus I$.

Démonstration que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont : Notons l'ensemble des fonctions paires par $P = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)\right\}$ et celui des fonctions impaires $I = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\right\}$. Montrons que I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (il en sera de même pour P).

- $I \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$.
- Notons la fonction nulle $\theta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(-x) = 0 = -\theta(x)$ donc $\theta \in I$.
- Soit $(f, g) \in I^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -(\lambda f(x) + g(x)) = -(\lambda f + g)(x)$$
Ainsi, $\lambda f + g$ est impaire et $\lambda f + g \in I$.

Ainsi, I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrons qu'il une unique fonction paire, notée p, et une unique fonction impaire, notée i, telles que $f = p + i$. Comme nous n'avons aucune idée de qui prendre pour p et pour i, procédons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** supposons qu'il existe p et i deux fonctions telles que $f = p + i$ avec p une fonction paire et i une fonction impaire. Le but est de trouver une expression de p et de i. Comme p et i sont des fonctions, cela revient au même de calculer $p(x)$ et $i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$, en particulier, comme $f = p + i$, $f(x) = p(x) + i(x)$. Comme p est paire $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$. Ainsi, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. Dès lors, on a un système de deux équations $\begin{cases} p(x) + i(x) &= f(x) \\ p(x) - i(x) &= f(-x) \end{cases}$ dont les inconnues sont $p(x)$ et $i(x)$. En effectuant la somme, on obtient que $2p(x) = f(x) + f(-x)$ et en effectuant la différence, on obtient $2i(x) = f(x) - f(-x)$. Ainsi, $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Par conséquent, on a montré que si p et i existent, alors $p\colon x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i\colon x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

- **Synthèse :** posons les fonctions $p\colon x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i\colon x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ et montrons qu'elles répondent au problème posé :
  — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = p(x)$, ainsi $p \in P$.
  — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $i(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = -i(x)$, ainsi $i \in I$.
  — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x)+i(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$, ainsi $p+i=f$.

Ainsi, la synthèse a bien démontré l'existence de p paire et i impaire telle que $f = p+i$ (vu que l'on a été capable de poser une fonction p et une fonction i qui conviennent). L'analyse a bien démontré l'unicité (vu que si p et i vérifient les conditions du problème, p et i ont été entièrement déterminées). Ainsi, pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(p,i) \in P \times I$ tel que $f = p+i$. Donc $E = P \oplus I$. ■

5 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel

5.1 Famille libre

Remarque 10. Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de E, si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Définition d'une famille libre

Soit $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de E, on dit que la famille $\mathscr{L}$ est **libre**, si il y a une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}$. Autrement dit si

$$\forall\, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \lambda_i = 0 \right)$$

Si $\mathscr{L}$ est libre, on dit aussi que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont **linéairement indépendants**.

Remarque 11. On dit que $\mathscr{F}$ est **liée** si elle n'est pas libre, c'est-à-dire ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. En isolant e_{i_0}, on obtient $e_{i_0} = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \dfrac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} e_i \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$. Ainsi, une famille $\mathscr{F}$ est liée ssi l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ s'exprime une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

Exemple 11. Soit $u = (1,2,3)$ et $v = (1,1,1)$ et $w = (1,1,10)$, montrer que (u,v,w), est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 12. La famille $(1, \mathrm{i})$ est-elle libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-EV ? Et vu comme $\mathbb{C}$-EV ?

Théorème n° 1 : condition nécessaire et suffisante pour être libre

Soit $\mathscr{L} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre ssi $x \notin \operatorname{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Démonstration du théorème n° 1 : Supposons que $x \in \operatorname{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i x_i$, en passant le x de l'autre côté, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E$ avec $\lambda_{n+1} = -1$ et $x_{n+1} = x$. Ainsi, la famille $\mathscr{L} \cup (x)$ est liée. Par contraposée, si $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre alors $x \notin \operatorname{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Supposons que $x \notin \operatorname{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, supposons $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \lambda_{n+1} x = 0_E$. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{n+1}} x_k$$

Ce qui est absurde. Donc $\lambda_{n+1} = 0$. Dès lors, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$ comme $\mathscr{L}$ est libre, il en découle que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Ainsi, $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre.

■

Exemple 13. La famille $((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ est liée.

Remarque 12. Si $0_E \in \mathscr{F}$, où $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est liée.
Si (u) est une famille de un vecteur de E, alors (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
Si (u,v) est une famille de deux vecteurs de E, alors, (u,v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Attention cela ne se généralise pas à plus de deux vecteurs
Si pour tout $i \neq j$, e_i et e_j sont non colinéaires, cela n'implique pas forcément que $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.
En effet, la famille $((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ est liée.

Remarque 13. Soit $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille. Alors, $\mathscr{L}$ est libre si et seulement si pour tout $x \in \text{vect}(\mathscr{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Exemple 14. Cela permet d'identifier : si $m\vec{a} = \vec{F}$ et $\vec{a} = a_x\vec{x} + a_y\vec{y}$, $\vec{F} = F_x\vec{x} + F_y\vec{y}$, alors $ma_x = F_x$ et $ma_y = F_y$.

Théorème n° 2 : famille de polynômes de degré deux à deux distincts est libre
Si $\mathscr{L}$ est une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts, alors $\mathscr{L}$ est libre.

Démonstration du théorème n° 2 : Quitte à renuméroter les polynômes, on suppose que $\mathscr{L} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ avec

$$0 \leqslant d^\circ P_1 < d^\circ P_2 < \ldots < d^\circ P_n$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Montrons que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Posons $d = \max\{k \in [\![1\,;n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$ (ensemble fini et non vide, donc le maximum est bien défini). Ainsi, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, si $\lambda_k \neq 0$ alors $k \leqslant d$. Par contraposée, si $k > d$ alors $\lambda_k = 0$. Dès lors, en coupant la somme en trois :

$$0 = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k + \lambda_d P_d + \sum_{k=d+1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{=0} P_k = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k + \lambda_d P_d + 0$$

Donc $\lambda_d P_d = -\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k$. En passant au degré, on obtient

$$d^\circ(\lambda_d P_d) \leqslant \max_{k \in [\![1\,;d-1]\!]} d^\circ \lambda_k P_k \leqslant d^\circ P_{d-1}$$

Or, comme $\lambda_d \neq 0$, on obtient $d^\circ P_d = d^\circ(\lambda_d P_d) < d^\circ P_{d-1}$. Ceci est absurde, ainsi, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = 0$, ainsi $\mathscr{L}$ est libre. ■

5.2 Famille génératrice

Définition d'une famille génératrice

Une famille finie de vecteurs de E, $\mathscr{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est appelée **famille génératrice** de E si

$$E = \text{vect}(\mathscr{G}) = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Autrement dit, $\mathscr{G}$ est génératrice ssi $\forall x \in E \quad \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Exemple 15.
1. Montrer que $(1, X^2 + X, X + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle libre ?
2. Montrer que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
3. Montrer que $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Est-elle libre ?

Remarque 14. La famille $\mathscr{G}$ est nécessairement génératrice de $\text{vect}(\mathscr{G})$.

5.3 Bases

Définition d'une base

Soit $\mathscr{B}$ une famille finie de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** si $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Ainsi, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E ssi $\quad \forall x \in E \quad \exists!\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

On dit alors que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Attention : il faut une famille finie

Au programme de PCSI/PSI/PC, les familles libres, génératrices et les bases sont toujours des familles finies.

Exemple de bases importantes (à connaître)

1. $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Si $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $d^\circ P_i = i$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
4. $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 16. Montrer que $((1,1,1), (1,0,0), (0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (mais ce n'est pas la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Exemple 17. Donner une base de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Puis vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition d'une base adaptée

Soient F et G deux SEV supplémentaires de E, $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{B}'$ une base de G. Alors, $\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de E. On dit que $\mathscr{B}''$ est une **base adaptée** à la décomposition de $E = F \oplus G$.

6 Fiche méthode

Comment montrer que E est un espace vectoriel ?

M1 Montrer que E respecte la définition (rare et long).

M2 Reconnaître un espace vectoriel de référence.

<u>M3</u> Montrer que E un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (voir méthode suivante).

Comment montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ?

<u>M1</u> Montrer que $F \subset E \qquad 0_E \in F \qquad \forall (a,b) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad a + \lambda b \in F$.

M2 $F = \mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_i \in E$.

M3 F s'écrit comme somme (ou comme intersection) de SEVs de E.

Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre ?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda e_i = 0_E$, et montrer que tous les λ_i sont nuls (système à résoudre souvent).

Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice ?

Soit $x \in E$, trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ (système à résoudre, ou analyse-synthèse).

Comment montrer qu'une famille est une base ?

Montrer qu'elle est libre et génératrice.

Comment montrer que F et G sont en somme directe ?

Prendre $x \in F \cap G$, montrer que $x = 0_E$.

Comment montrer que F et G sont supplémentaires ?

M1 Soit $x \in E$, montrer qu'il existe unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ (par analyse-synthèse, par exemple).

M2 Montrer que $F \oplus G$, puis, soit $x \in E$, trouver un couple (f, g) tel que $x = f + g$, $f \in F$ et $g \in G$.

7 Complément hors programme : les familles libres et génératrices infinies

Cette partie n'est pas au programme. Vous pouvez la lire et la travailler seulement si vous avez de bons résultats en mathématiques **et** si cela vous intéresse **et** si vous ambitionnez une très bonne école

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans toute cette partie, on va considérer $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs infinie indéexée par I. Par exemple si $I = \mathbb{N}$, on pourra considérer la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $P_n = X^n \in \mathbb{R}[X]$. Le but est de donner un sens à «$(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice» (ou libre). Sachant que les définitions de ce chapitre ne suffisent pas. En effet, on ne peut pas dire que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E ssi pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tel que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$. Comme on ne peut pas donner un sens à la somme d'une infinité de vecteurs, il faut donc tout reprendre différemment pour contourner ce problème.

Définition de l'espace vectoriel engendré

Soit $x \in E$, on dit que x est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe $J \subset I$ avec J un ensemble fini et $(\lambda_j)_{j\in J}$ tel que $x = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j x_j$. On note $\mathrm{vect}(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$. Ainsi,

$$\mathrm{vect}(x_i)_{i\in I} = \left\{ x \in E \mid \exists J \subset I \text{ avec } J \text{ fini} \quad \exists(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J \qquad x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \right\}$$

Remarque 15. Sans surprise, $\mathrm{vect}(x_i)_{i\in I}$ est un SEV de E et c'est le plus petit SEV de E à contenir tous les x_i.

Définition d'une famille génératrice

On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si $E = \mathrm{vect}(x_i)_{i\in I}$.

Exemple 18. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

Définition d'une famille libre de vecteurs

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si pour tout $J \subset I$ avec J fini, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est libre.

Exemple 19. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}[X]$.

Définition d'une base

On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 20. $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.