Révision 1 (fonctions)

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes en précisant les ensembles de dérivabilité :
   (a) $x \mapsto \cos^3(x)$
   (b) $x \mapsto \exp(\sin(x))$
   (c) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$
   (d) $x \mapsto \ln(\cos(x))$
   (e) $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
   (avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$)
2. Complétez : la fonction arccos est une bijection de vers , elle est dérivable sur et pour tout $x \in$, $\arccos'(x) =$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' + \sin(x)y = 0$
   On donnera l'ensemble des solutions sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.
4. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$.
   On donnera l'ensemble des solutions sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.
5. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$.
   On donnera l'ensemble des solutions sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de fonctions.
6. Après avoir justifier la dérivabilité, dériver la fonction $f\colon x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$
   En déduire la valeur de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^*$.
7. Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$
8. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$
9. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$
10. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \ln(x)$
11. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{x}$.
12. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
13. Calculer, en justifiant, les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.
14. Soit $f\colon [3\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ et définir avec les quantificateurs, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Puis nier cette définition avec des quantificateurs.

Pour les trois questions suivantes, on pose $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}\cos(x)$.

15. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que f est une fonction k-lipschitzienne avec une certaine constante k à déterminer.
16. Démontrer que f admet au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?
17. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_n$ par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on en déduire pour cette suite $(u_n)_n$?