Révision 2 (suites)

1. Déterminer les (éventuelles) limites des suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :
   (a) $a_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n$
   (b) $b_n = (-2)^n + n$
   (c) $c_n = \frac{\ln(n)}{n}$
   (d) $d_n = n\sin(1/n)$
   (e) $u_n = 2^n$
   (f) $v_n = (-2)^n$
   (g) $w_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$
   (h) $x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{5}{2}\right)^n$
   (i) $z_n = \left(-\frac{3}{4}e^{i5}\right)^n$
2. Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison -2 et $u_{21} = 10$. Pour tout entier $n \geqslant 5$, calculer u_n, puis $\sum_{k=5}^{n} u_k$.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison 2 et $u_{100} = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 10$, calculer u_n puis $\sum_{k=10}^{n} u_k$.
4. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n - 9$ et $u_2 = 3$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, calculer u_n puis $\sum_{k=2}^{n} u_k$.
5. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Donner l'ensemble des suites réelle $(u_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de suites.
7. Donner la définition avec des quantificateurs que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Puis nier cette définition.
8. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 3$ et par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 3)^2$.
   (a) Écrire une fonction Python `BSuiteU(n:int)->float` qui renvoie u_n à l'aide d'une boucle.
   (b) Écrire une fonction récursive Python `RSuiteU(n:int)->float` qui fait la même chose.
   (c) Donner un invariant de boucle pour la première fonction (permettant de montrer la correction) et un variant de récursivité pour la seconde fonction (permettant de montrer la terminaison).
   (d) Écrire une fonction `Seuil(A:float)` qui étant donné un réel A renvoie le premier n tel que $u_n \geqslant A$.
9. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse soit par une preuve si la proposition vous semble vraie (ou en citant le théorème qui affirme ce résultat), soit par un contre-exemple si la proposition vous paraît fausse :
   (a) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante et minorée par 0, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   (c) Soient $(u_n)_n$, (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers deux limites différentes, alors $(v_n)_n$ diverge.
   (d) Si $(u_n)_n$ est une suite ayant pour limite ℓ, alors $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
   (e) Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux alors $(u_n)_n$ converge.
   (f) $n^2 = o(n^3)$
   (g) $n^3 = o(n^2)$
   (h) $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
   (i) $n^2 \sim n^3$
   (j) Si une suite est bornée alors elle converge.
   (k) Si une suite converge alors elle est bornée.
   (l) Si $f : I \to I$ croissante et $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_n$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est croissante.