Révision 1 (fonctions)

1. (a) $x \mapsto \cos^3(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puissance entière naturelle d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$) de dérivée $x \mapsto -3\sin(x)\cos^2(x)$.
   (b) Par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(\sin(x))$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$.
   (c) $\ln\colon \left]1\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $x \mapsto x^{-1/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$ est dérivable sur $\left]1\,;+\infty\right[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{x} \times \ln^{-3/2}(x)$.
   (d) Notons
   $$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$$
   Alors $\cos\colon D \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable. Par composition $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est dérivable sur D de dérivée $x \mapsto \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.
   (e) Distinguons les cas :
   - Si $c = 0$, alors $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine de dérivée $x \mapsto \dfrac{a}{d}$.
   - Si $c \neq 0$, $f\colon x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{d}{c}\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{d}{c}\}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{d}{c}\}$
   $$f'(x) = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\det(M)}{(cx+d)^2}$$
   En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. La fonction arccos est une bijection de $[-1\,;1]$ vers $[0\,;\pi]$, elle est dérivable sur $]-1\,;1[$ et pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. L'ensemble des solutions est de la forme :
   $$\left\{x \mapsto C\mathrm{e}^{\cos(x)} \mid C \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}) = \mathrm{vect}(\exp\circ\cos)$$
4. L'équation caractéristique de cette équation du second degré à coefficients constants et homogène est $r^2+4r+4 = (r+2)^2 = 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions est de la forme :
   $$\left\{x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^{-2x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x \mapsto Ax\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-2x} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$
   Avec $f_1\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x}$ et $f_2\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.
   Remarque 1. La famille (f_1, f_2) est donc une famille génératrice de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle. Montrons que (f_1, f_2) est une famille libre [1]. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors, en particulier, $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, d'où $b = 0$, pour $x = 1$, on obtient $a1\mathrm{e}^2 = 0$ soit $a = 0$. Dès lors (f_1, f_2) est libre donc est une base de l'ensemble des solutions.
5. L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants et homogène est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant vaut $4 - 4\times 5 = -16 = (4\mathrm{i})^2$. Ainsi, les racines de cette équation caractéristique sont $\dfrac{2+4\mathrm{i}}{2} = 1+2\mathrm{i}$ et $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i}$. L'ensemble des solutions est donc :
   $$\begin{aligned}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \left\{x \mapsto A\mathrm{e}^x\cos(2x) + B\mathrm{e}^x\sin(2x) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{vect}(f_1, f_2) \quad \text{avec} \quad f_1\colon x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(2x) \quad \text{et} \quad f_2\colon x \mapsto \mathrm{e}^x\sin(2x)\end{aligned}$$
   Remarque 2. La famille (f_1, f_2) est donc une famille génératrice de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle. Montrons que (f_1, f_2) forme une famille libre. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors, en particulier, $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, d'où $a = 0$, pour $x = \pi/4$, on obtient $be^{\pi/4} = 0$ soit $b = 0$. Dès lors (f_1, f_2) est libre donc est une base de l'ensemble des solutions.
6. La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par composée, $x \mapsto \arctan(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
   $$f'\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

1. Ne pas dire que f_1 est colinéaire à f_2, en effet le x n'est pas une constante.

Ainsi, la dérivée de f est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$. La dérivée de f est aussi nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Dès lors, f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et par imparité de arctan, $f(-1) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2$.

7. $(X+2)(X+3)$ est un polynôme scindé à racines simples, d'après le cours, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{(X+2)(X+3)} = \frac{A}{X+2} + \frac{B}{X+3}$$

En multipliant par $X+2$ puis en remplaçant X par -2, on obtient $A = 1$. En multipliant par $X+3$ puis en remplaçant X par -3, on obtient $B = -1$. Ainsi :

$$\int_3^4 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x+2|) - \ln(|x+3|)]_3^4 = \ln(6) - \ln(7) - \ln(5) + \ln(6) = \ln\left(\frac{36}{35}\right)$$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}\right)$

9. On pose $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, alors $\mathrm{e}^x = t^2 + 1$, soit $x = \ln(t^2+1)$, en dérivant, on obtient $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^3-1}} \frac{1}{t} \times \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [2\arctan(t)]_{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^3-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^3-1}) - 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^2-1})$$

10. Posons $t = \ln(x)$, alors $x = \mathrm{e}^t$ et donc $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ainsi : $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(2)} \sin(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut faire une double intégration par parties, on peut aussi utiliser le fait que $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})$, ainsi,

$$\int_1^2 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})})\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t\right)$$

Calculons donc cette dernière intégrale, avant d'en calculer la partie imaginaire :

$$\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})}}{1+\mathrm{i}}\right]_0^{\ln(2)} = \left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ln(2)} - 1\right)\frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{\mathrm{i}-1}{2} + (\cos(\ln(2)) + \mathrm{i}\sin(\ln(2)))\,(1-\mathrm{i})$$

En prenant la partie imaginaire, de cette intégrale, on trouve que $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2))$

11. Posons $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et donc $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^t 2t\,\mathrm{d}t = [(2t-2)\mathrm{e}^t]_0^1 = 2$

12. On effectue une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/3} \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = [\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v(x)}]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \underbrace{1}_{u'(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

13. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \colon x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ (inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$: « $f^{(n)} \colon x \mapsto \dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$ ». Remarquons que pour $n = 0$, $f^{(0)} = f \colon x \mapsto \dfrac{0!}{(x-a)^{0+1}}$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $f^{(n)} \colon x \mapsto n!(a-x)^{-n-1}$ se dérive sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ comme une fonction puissance[2] ainsi, $(f^{(n)})' \colon x \mapsto n! \times (-1) \times (-n-1)(a-x)^{-n-2}$. ceci montre que $f^{(n+1)} \colon x \mapsto \dfrac{(n+1)!}{(a-x)^{(n+1)+1}}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \colon x \mapsto \dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.

14. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [3\,;+\infty[\qquad x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in [3\,;+\infty[\qquad x \geqslant A \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon$

2. Rappelons $(u^m)' = mu'u^{m-1}$ avec u fonction dérivable ne s'annulant pas et $m \in \mathbb{Z}$.

15. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1/3 - 1/3\sin(x)$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leqslant |1/3| + |-1/3\sin(x)| = |1/3| + |-1/3| \times |\sin(x)| \leqslant 2/3$$

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est 2/3-lipschitzienne.

16. Posons $g\colon x \mapsto f(x) - x$. Remarquons que :

$$g(0) = 1/3 \qquad \text{et} \qquad g(\pi) = -2\pi/3 - 1/3 \qquad \text{ainsi} \qquad g(\pi) \leqslant 0 \leqslant g(0)$$

De plus, la fonction g est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ (différences de fonctions qui le sont), ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,0\,;\pi\,]$ tel que $g(c) = 0$, dès lors, $f(c) - c = 0$ et c est un point fixe de f.
Soit d un point fixe de f, alors comme f est 2/3 lipschitzienne, $|f(c) - f(d)| \leqslant 2|c-d|/3$. Soit $|c-d|/3 \leqslant 0$, ainsi, $c - d = 0$ et donc $c = d$. Il y a ainsi unicité du point fixe[3].

17. D'après le théorème[4] des suites récurrentes par une fonction k-lipschitzienne avec $k < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

3. Dès que la fonction est k-lipschitzienne avec $k < 1$, il y a toujours au plus unicité du point fixe (s'il existe alors il est unique) avec la même preuve *mutatis mutandis*.

4. Il est bon de connaître le principe de la démonstration : prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - c| \leqslant k^n |u_0 - c| \leqslant k^n \pi$.