# Révision 2 (suites)

1. (a) A priori, c'est une forme indéterminée. Mais, c'est une croissance comparée [1] donc $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (b) Montrons que la suite $(b_n)_n$ n'a pas de limite. Supposons que $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$. Alors, par somme de limites $b_{2n} = 2^{2n} + 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, tandis que

   $$b_{2n+1} = -2^{2n+1} + 2n + 1 = 2^{2n+1}\left(-1 + \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\right)$$

   Or, par croissance comparée, $(2n+1)/2^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par somme et par produit $b_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. Mais par extraction d'une suite convergente, on sait que $b_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = +\infty$, de même $b_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = -\infty$. Ainsi, $+\infty = -\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, $(b_n)_n$ n'a pas de limite.

   (c) $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (croissance comparée)

   (d) Par continuité de sin en 0, $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \sin(0) = 0$, donc $\sin(1/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (caractérisation séquentielle de la limite), or, $n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ainsi, a priori, nous avons une forme indéterminée.
   Cependant, la fonction sin est dérivable en 0, par caractérisation séquentielle de la limite,

   $$d_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(0)}{\frac{1}{n} - 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

   (e) $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (suite géométrique de raison 2 avec $2 > 1$).

   (f) La suite $(v_n)_n$ n'a pas de limite. En effet, supposons par l'absurde que si $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Par extraction $v_{2n} = 2^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, donc $\ell = +\infty$, mais par extraction $v_{2n+1} = -2^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, donc $\ell = -\infty$ absurde.

   (g) La suite $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (suite géométrique de raison $3/4$ avec $|3/4| < 1$).

   (h) A priori, c'est une forme indéterminée, pour la lever, on factorise par ce qui nous semble l'emporter :

   $$x_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(-1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

   Or, $(3/5)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (suite géométrique de raison $3/5$ avec $|3/5| < 1$), par somme et produit de limites [2], $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

   (i) La suite $(z_n)_n$ est géométrique de raison $-\frac{3}{4}e^{i5}$ avec $\left|-\frac{3}{4}e^{i5}\right| = 3/4 < 1$, ainsi $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{21} + (n-21)\times(-2) = 52 - 2n$ Par somme de termes d'une suite arithmétique :

   $$\sum_{k=5}^{n} u_k = \frac{(u_5 + u_n)}{2}\times(n-4) = \frac{104 - 10 - 2n}{2}\times(n-4) = (47-n)(n-4)$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{100}\times 2^{n-100} = 2^{n-100}$, de plus, $\sum_{k=10}^{n} u_k = u_{10}\times\frac{1-2^{n-9}}{1-2} = 2^{90}(2^{n-9}-1)$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, cherchons le point fixe : $\ell = -2\ell - 9$ ssi $\ell = -3$. Posons alors $\ell = -3$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n - 9 \\ \ell &= -2\ell - 9 \end{cases}$, en faisant la différence, on obtient que $u_{n+1} - \ell = -2(u_n - \ell)$. Ceci montre que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \ell = (-2)^{n-2}(u_2 - \ell)$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6(-2)^{n-2} - 3$. Par linéarité de la somme et somme des termes d'une suite géométrique :

   $$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} 6(-2)^{n-2} - 3 = \sum_{k=2}^{n} 6(-2)^{n-2} - \sum_{k=2}^{n} 3 = 6\times\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)} - 3(n-1) = (-2)^n - 3n + 5$$

1. En effet $a_n = n\exp(n\ln(3/4))$ et par croissance comparée, on sait que $x\exp(x\ln 34) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\ln(3/4) < 0$.
2. Moralité : le 5/2 l'emporte toujours sur le 3/2.

5. La suite $(u_n)_n$ est une suite réelle récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 = 2r - 2$, soit $r^2 - 2r + 2 = 0$. Le discriminant est $4 - 8 = -4 = (2\mathrm{i})^2$, ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = \dfrac{2+2\mathrm{i}}{2} = 1 + \mathrm{i}$ et $r_2 = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$. Donc $|r_1| = \sqrt{2}$, et $r_1 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\sqrt{2})^n \left(A\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

De plus, pour $n = 0$, on obtient $A = 1$, pour $n = 1$, on a $1 = \sqrt{2}(A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2})$ donc $B = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)$.

6. L'équation caractéristique est $r^2 = 6r - 9$ soit $r - 6r + 9 = 0$ dont 3 est solution double. Ainsi, l'ensemble des suites vérifiant la relation est :

$$\left\{((An+B)3^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{A(n3^n)_{n\in\mathbb{N}} + B(3^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{vect}((n3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

**Remarque 1.** Ainsi, $\mathscr{B} = ((n3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille génératrice de l'ensemble des suites vérifiant la relation demandée. Montrons que c'est une famille libre. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a(n3^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(3^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ (suite nulle). Cela veut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $an3^n + b3^n = 0$. En particulier, pour $n = 0$, il vient $b = 0$, puis pour $n = 1$, il vient $3a = 0$ donc $a = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre et est donc une base de l'ensemble des suites vérifiant la relation demandée.

7. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon$

8. (a)
```
def BsuiteU(n):
        u=3# valeur de u_0
        for i in range(1,n+1):
                u=(u-3)**2
        return u
```
(b)
```
def RSuiteU(n):
        if n==0:
                return 3
        else:
                a=RSuiteU(n-1)
        return (a-3)**2
```
(c) À la fin de la $i$-ième itération $u = u_i$. En effet, pour $i = 1$, $u = (u_0 - 3)^2 = u_1$. Et raisonnons par récurrence, si à la $i$-ième itération, on a $u = u_i$, alors la $i+1$-ième itération $u = (u_i - 3)^2 = u_{i+1}$. Ainsi, $u = u_i$ est un invariant de boucle. Pour la seconde, $n$ est un variant de récursivité, il décroît strictement jusqu'à attendre 0, valeur pour laquelle l'algorithme renvoie une valeur.

(d)
```
def Seuil(A):
        n=0
        u=3
        while u<A:
                u=(u-3)**2
                n=n+1
        return n
```

9. (a) **Faux !** Cela ressemble à la conservation des inégalités larges par passage à la limite, mais ici ce résultat est faux ! En effet, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ n'ont pas nécessairement de limite, donc l'inégalité entre limites n'a pas de sens si on prend, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 58 + \sin(n)$.
(b) **Faux !** La suite $(3 + 1/(n+1))_n$ est décroissante et minorée par 0 elle ne converge pourtant pas vers 0.
(c) **Faux !** Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 + \exp(-n)$, $v_n = 2$ et $w_n = 5 + 1/n + 1$, alors les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers des limites différentes, mais cela n'empêche pas $(v_n)_n$ de converger.
(d) **Vrai !** C'est le théorème des suites extraites.
(e) **Faux !** Si les deux suites ne convergent pas vers la même limite, alors $(u_n)_n$ diverge. Considérer par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(f) **Vrai !** car $n^2/n^3 = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
(g) **Faux !** car $n^3/n^2 = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
(h) **Vrai !** car $(n^2/n^3)_n$ admet une limite finie (qui est 0) donc est bornée.
(i) **Faux !** car le quotient vaut $1/n$ et ne tend pas vers 1.

(j) **Faux !** par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais diverge.

(k) **Vrai !** C'est du cours !

(l) **Faux !** Le cours assure que $(u_n)_n$ est monotone mais pas forcément croissante. Considérons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{2} \end{cases}$ (fonction croissante) et $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = 1/2 < u_0$, ainsi la suite $(u_n)_n$ n'est pas croissante.