

Révision 4 (polynômes)

- Les racines de P sont exactement les nombres complexes z tels que $z^3 - 1 = 0$, (les racines cubiques de l'unité¹). donc sont $e^{i\frac{2\pi \times 0}{3}} = 1$, $e^{i\frac{2\pi \times 1}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{2\pi \times 2}{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$, et $j^3 = 1$)².
 - $1 \times j \times j^2 = j^3 = 1$,
 - Par 2π -périodicité de $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $\bar{j} = e^{-i2\pi/3} = e^{i(-2\pi/3+2\pi)} = e^{i4\pi/3} = j^2$
 - $j^{-1} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j} = j^2$.
- 2 est racine au moins³ de multiplicité 2, i est racine et P est un polynôme à coefficients réels, donc $-i$ est aussi racine. Ainsi, $(X - 2)^2(X - i)(X + i) | P$; il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X - 2)^2(X - i)(X + i)$ Mais $d^\circ P \leq 4$, donc nécessairement Q est constant. Notons λ cette constante, $P = \lambda(X - 2)^2(X^2 + 1)$. Mais comme $P(3) = 4$, nécessairement $4 = \lambda \times 1 \times 10$. Ainsi, $\lambda = \frac{2}{5}$. Donc $P = \frac{2}{5}(X - 2)^2(X - i)(X + i)$.
- Comme $d^\circ P \leq 5$ et que P est non nul, on en déduit qu'il y a au plus cinq racines comptées avec multiplicité, or, on en a déjà 4 : 1 qui compte double et 2 qui compte double, or $1 + 1 + 2 + 2 = 6$, il y a donc nécessairement une cinquième racine x telle que $1 + 1 + 2 + 2 + x = 4$, dès lors, $x = -2$. Donc, $P = \lambda(X - 1)^2(X - 2)^2(X + 2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Posons $B = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Remarquons⁴ que $B(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Donc $X - 1 | B$, ainsi $B = (X - 1)(X^2 - 5X + 6) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ Comme $B \neq 0$, effectuons la division euclidienne de $X^n + 1$ par B : il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n + 1 = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 3$. Donc $R \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$. Donc :

$$X^n + 1 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)Q + aX^2 + bX + c$$

En remplaçant successivement⁵ X par 1, on obtient : $2 = (1 - 1)(1 - 2)(1 - 3)Q(1) + a + b + c = a + b + c$, en remplaçant X par 2, on obtient $2^n + 1 = (2 - 1)(2 - 2)(2 - 3)Q(2) + 4a + 2b + c$, en remplaçant X par 3, on obtient $3^n + 1 = (3 - 1)(3 - 2)(3 - 3)Q(3) + a3^2 + b3 + c$. Ainsi, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} c + b + a = 2 \\ c + 2b + 4a = 2^n + 1 \\ c + 3b + 9a = 3^n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c + b + a = 2 \\ b + 3a = 2^n - 1 \\ 2b + 8a = 3^n - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c + b + a = 2 \\ b + 3a = 2^n - 1 \\ 2a = 3^n - 2^{n+1} + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } R = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}X^2 + \left(2^n - 1 - 3\frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\right)X + \left(2 - \left(2^n - 1 - 3\frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\right) - \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\right)$$

- Si α est une racine double de P , alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$. En particulier, α serait racine de $P' = 6X^2 + 52X + 112 = 2(3X^2 + 26 + 56)$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $26^2 - 4 \times 3 \times 56 = 676 - 672 = 4$, ainsi les racines sont $\frac{-26 + 2}{6} = -4$ et $\frac{-26 - 2}{6} = \frac{-14}{3}$. Or,

$$P(-4) = 2((-4)^3 + 13 \times (-4)^2 + 56 \times (-4) + 80) = 2 \times 16 \times (-4 + 13 - 14 + 5) = 0$$

Ainsi, -4 est une racine de multiplicité au moins 2. De plus, la somme des racines de P comptées avec multiplicité vaut $\frac{-26}{2} = -13$. Donc, si $x_1 = -4$, $x_2 = -4$ et x_3 est la dernière racine complexe, on a $x_1 + x_2 + x_3 = -13$, soit $x_3 = -5$. Ainsi⁶, $P = 2(X + 4)(X + 4)(X + 5)$.

- La division euclidienne de $X^4 - 3$ par $X^3 - X$ est $X^4 - 3 = X(X^3 - X) + X^2 - 3$, Ainsi, $\frac{X^4 - 3}{X^3 - X} = X + \frac{X^2 - 3}{X(X - 1)(X + 1)}$. Le dénominateur étant scindé à racines simples, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{X^2 - 3}{X(X - 1)(X + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}$$

- En multipliant par X puis en remplaçant X par 0, on obtient $a = 3$.
- En multipliant par $X - 1$ puis en remplaçant X par 1, on obtient $b = -1$.

1. Les racines n -ième sont donc à réviser.
 2. Sinon, comme on sait que 1, j et j^2 sont racines de P , on connaît directement leur somme et leur produit.
 3. Si $P(2) = P'(2) = 0$ cela ne veut pas dire que la multiplicité vaut exactement 2, pour cela il faudrait aussi que $P''(2) \neq 0$.
 4. Rappel si on ne sait pas trouver des racines d'un polynôme, on peut toujours commencer par chercher au brouillon des racines évidentes : 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3.
 5. Ne pas oublier de remplacer X par 1 **partout** y compris dans Q et donc écrire $Q(1)$ et non juste Q .
 6. Ne pas oublier le coefficient dominant en facteur.

- En multipliant par $X + 1$, puis en remplaçant X vers -1 , on obtient $c = -1$.

$$\frac{X^2 - 3}{X(X-1)(X+1)} = \frac{3}{X} + \frac{-1}{X-1} + \frac{-1}{X+1} \quad \text{donc} \quad \frac{X^4 - 3}{X^3 - X} = X + \frac{3}{X} + \frac{-1}{X-1} + \frac{-1}{X+1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^4 - 3}{x^3 - x} dx &= \int_2^3 \left(x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3 \ln(x) - \ln(x-1) - \ln(x+1) \right]_2^3 \\ &= \frac{9}{2} + 3 \ln(3) - \ln(2) - \ln(4) - \frac{4}{2} - 3 \ln(2) + \ln(1) + \ln(3) = \frac{5}{2} + \ln\left(\frac{81}{64}\right) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, posons $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$, alors f est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ (comme somme d'inverses de polynômes qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$), de plus :

$$\begin{aligned} f^{(0)} : x &\mapsto x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} & f^{(1)} : x &\mapsto 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ f^{(2)} : x &\mapsto 0 + \frac{3 \times 2}{x^3} - \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x+1)^3} & f^{(3)} : x &\mapsto -\frac{3 \times 6}{x^4} + \frac{6}{(x-1)^4} + \frac{6}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

On conjecture, alors, que pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n) : \ll f^{(n)} : x \mapsto n!(-1)^n \left(\frac{3}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right) \gg$.

- $\mathcal{P}(2)$ est vraie par calcul⁷.
- Soit un entier $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors, on dérive $f^{(n)}$ comme une somme de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} (f^{(n)})' : x &\mapsto n!(-1)^n \left(\frac{-3 \times (n+1)}{x^{n+2}} + \frac{n+1}{(x-1)^{n+2}} + \frac{n+1}{(x+1)^{n+2}} \right) \\ f^{(n+1)} : x &\mapsto (n+1)!(-1)^{n+1} \left(\frac{3}{x^{n+2}} - \frac{1}{(x-1)^{n+2}} - \frac{1}{(x+1)^{n+2}} \right) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

7. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned} P = xX^2 + y(X+1)X + z(X+1)^2 = (x+y+z)X^2 + (y+2z)X + z &\iff \begin{cases} x+y+z = a \\ y+2z = b \\ z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = c \\ y = b - 2c \\ x = a - b + c \end{cases} \end{aligned}$$

(la première équivalence est dû au fait qu'un polynôme a une unique décomposition dans la base \mathcal{B}). Ainsi, on a montré que tout P , vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$, s'écrivait comme une unique combinaison linéaire dans la famille \mathcal{B}' (famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$), ainsi \mathcal{B}' est une base⁸ de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Par définition, $P = c \cdot 1 + b \cdot X + a \cdot X^2$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ et d'après la question précédente, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) =$

$$\begin{pmatrix} a - b + c \\ b - 2c \\ c \end{pmatrix}$$

9. Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(2) = P'(2) = P(3) = 0 \iff (X-2)^2(X-3) | P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X-2)^2(X-3)Q \\ &\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (X-2)^2(X-3)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = aX^2(X-2)^2(X-3) + bX(X-2)^2(X-3) + c(X-2)^2(X-3) \\ &\iff P \in \text{vect}(X^2(X-2)^2(X-3), X(X-2)^2(X-3), (X-2)^2(X-3)) \end{aligned}$$

Posons alors $\mathcal{B} = (X^2(X-2)^2(X-3), X(X-2)^2(X-3), (X-2)^2(X-3))$, ainsi, $F = \text{vect}(\mathcal{B})$ et \mathcal{B} est une famille génératrice de F . De plus, cette famille est constituée de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi \mathcal{B} est libre. Dès lors, \mathcal{B} est une base de F .

7. Attention, nous sommes obligés de faire démarrer l'hypothèse de récurrence au rang 2, en effet, dans $f^{(0)}$ et $f^{(1)}$ il y a un terme en plus.

8. Attention, c'est une famille dont les polynômes ont même degré mais elle est quand même libre.