Chapitre 14

Analyse asymptotique

Objectifs :

- Définir les $\sim$, o et $\mathcal{O}$ (déjà vus pour les suites) pour les fonctions.
- Définir les développements limités et établir les développements usuels à connaître par cœur.
- Savoir les utiliser pour le calcul de limites et les études de fonctions.

Un développement limité d'une fonction f en un point a à l'ordre n est, dit grossièrement, une fonction polynomiale (si elle existe) de degré au plus n qui approxime le mieux f au voisinage de a.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $n \in \mathbb{N}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I, f et g, h et k définies sur $I \backslash \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on divise par g, on sous-entend que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

1 Relation de négligeabilité : o

Définition de la relation de négligeabilité

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, lire «*$f$ est un petit o de g au voisinage de a*».

Exemples 1. • $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$ $\qquad$ $x^4 \underset{0}{=} o(x^2)$

- $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ ssi $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $f(x) \underset{a}{=} \ell + o(1)$.

Solution des exemples 1 : En effet, $x^2/x^4 = x^{-2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x^4/x^2 = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Remarque 1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\qquad f \underset{a}{=} o(g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\, a-\delta \,; a+\delta \,] \backslash \{a\} \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Attention $o(g)$ est une notation

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ n'implique pas que $f = h$. De plus, $f \underset{a}{=} h + o(g)$ veut dire $f = h + k$ où $k \underset{a}{=} o(g)$.

Proposition n° 1 : propriétés algébriques des o

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(\lambda g) = o(g)$
2. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f + h \underset{a}{=} o(g)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) $\qquad$ Bref, $\lambda o(g) + o(g) = o(g)$
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$. $\qquad$ Bref, $o(o(h)) \underset{a}{=} o(h)$
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$. $\qquad$ Bref, $o(g)o(k) = o(gk)$
5. $f = o(h)$ si et seulement si $fg = o(hg)$. $\qquad$ Bref, $go(h) = o(gh)$
6. $f = o(g + o(g))$ si et seulement si $f = o(g)$. $\qquad$ Bref, $o(g + o(g)) = o(g)$

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. $\dfrac{f}{g} = \lambda \times \dfrac{f}{\lambda g} \underset{a}{\to} 0 \times 0 = 0$.
2. $\dfrac{\lambda f + h}{g} = \lambda \dfrac{f}{g} + \dfrac{h}{g} \underset{a}{\to} \lambda 0 + 0 = 0$.
3. $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h} \underset{a}{\to} 0 \times 0 = 0$
4. $\dfrac{fh}{gk} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{h}{k} \underset{a}{\to} 0 \times 0 = 0$
5. $\dfrac{fg}{hg} = \dfrac{f}{h}$
6. $\dfrac{f}{g + o(g)} = \dfrac{f}{g(1 + o(1))} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{1}{(1 + o(1))}$. Or $1 + o(1) \underset{a}{\to} 1$. Ainsi, si $f = o(g)$, on en déduit que $\dfrac{f}{g + o(g)} \underset{a}{\to} 0$, donc $f = o(g + o(g))$. De même, si $f = o(g + o(g))$, alors $\dfrac{f}{g + o(g)} \underset{a}{\to} 0$. Donc $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{g + o(g)} \times (1 + o(g)) \underset{a}{\to} 0 \times 1 = 0$. Ainsi, $f = o(g)$.

■

Exemple 2. Si $f(x) \underset{0}{=} 51x^3 + o(x^2) + o(x^3) + 2 + x + o(x^2 + x^4)$, simplifier cette écriture.

Remarque 2. Les croissances comparées s'interprètent avec les o : soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. Si $\beta > 0$, $\qquad \ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$
2. Si $\alpha < \beta$, $\qquad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$, $\qquad x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$, $\qquad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\ln(x)^\beta) \qquad$ et $\qquad \mathrm{e}^{\alpha x} \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$

2 Développements limités en un point $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, a est un réel appartenant à I.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition d'un développement limité

On dit que f a un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ est la **partie régulière** du développement limité.

On note $DL_n(a)$ un développement limité à l'ordre n en a.

Exemple 3. À quel ordre, peut-on déduire un développement limité de f en 0 si $f \colon x \mapsto 1 + 5x + 3x\sqrt{x}$?

Exemples importants à connaître sans hésitation

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
- $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ $\qquad DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration des exemples importants de DL : Si $x \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, Donc $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

Or, $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$. Il vient $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

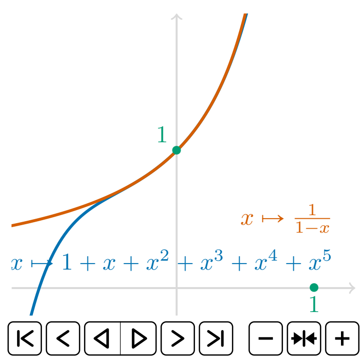

FIGURE 1 – Plusieurs polynômes approximant $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0.

Exemple 4. Si $f(x) \underset{a}{=} 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 - 13(x-a)^3 + o((x-a)^3)$, alors $f(x) \underset{a}{=} 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

Remarque 3. Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ et si $m < n$ alors elle admet un $DL_m(a)$. Il suffit de tronquer le développement limité $DL_n(a)$ à l'ordre souhaité.

Justification de la remarque 3 : En effet, si $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$. Alors,

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Or pour $k \geqslant m+1$, $(x-a)^k \underset{a}{=} o((x-a)^m)$, en particulier $(x-a)^n \underset{a}{=} o((x-a)^m)$, donc $o((x-a)^n) \underset{a}{=} o((x-a)^m)$. Ainsi, par une combinaison linéaire de fonctions qui sont négligeables devant $x \mapsto (x-a)^m$ en a, on en déduit que

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)) \underset{a}{=} o((x-a)^m)$$

Dès lors, $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + o((x-a)^m)$.

Proposition n° 2 : au plus unicité du développement limité

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration de la proposition n° 2 : En retranchant, on a $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k-b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $k \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Posons $A = \{k \in [\![0\,;n]\!],\ a_k \neq b_k\}$. L'ensemble A est un fini non vide donc admet un minimum noté $k_0 = \min(A)$, alors pour tout tout $k \in [\![0\,;k_0-1]\!]$, $a_k = b_k$. On obtient alors

$$\sum_{k=k_0}^{n}(a_k-b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0$$

Par troncature d'un DL à l'ordre k_0, $(a_{k_0}-b_{k_0})(x-a)^{k_0} + o((x-a)^{k_0}) = 0$. En divisant par $(x-a)^{k_0}$, on obtient $a_{k_0}-b_{k_0} = o(1)$, d'où $\dfrac{a_{k_0}-b_{k_0}}{1} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Donc $a_{k_0}-b_{k_0}$ est une constante qui tend vers 0 quand $x \to a$. Donc $a_{k_0} = b_{k_0}$. Ce qui est absurde. ■

Remarque 4. Si f est paire (resp. impaire) et a un $DL_n(0)$, alors les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Justification de la remarque 4 : En effet, si $f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et que f est paire, alors

$$f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k + o((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_k = a_k(-1)^k$. Quand k est impair, on obtient $a_k = -a_k$ soit $a_k = 0$, ainsi, tous les termes d'indices impairs sont nuls. On démontre la même chose, pour une fonction impaire.

Proposition n° 3 : condition nécessaire et suffisante pour avoir un $DL_0(a)$ ou un $DL_1(a)$

1. f admet un $DL_0(a)$ ssi f est continue en a. Alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$.
2. f admet un $DL_1(a)$ ssi f est dérivable en a. Alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Supposons que f soit continue en a, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. Dès lors, $f(x) = f(a) + o(1)$. Ainsi, f bien un développement limité en a à l'ordre 0. Supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre 0. Ainsi, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$, on obtient ainsi que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a_0$. D'après une remarque du chapitre limites et continuité, nécessairement, $f(a) = a_0$. Par conséquent, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ et donc f est continue en a.
2. Supposons que f soit dérivable en a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$, d'où $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} f'(a) + o(1)$, ainsi,
$$f(x) - f(a) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + (x-a)o(1) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a)$$
D'où $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, donc f admet un développement limité en a à l'ordre 1 Réciproquement, supposons que f admet un $DL_0(a)$: il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$. Par troncature d'un développement limité, $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(x-a)$, donc en appliquant le point 1, on obtient que f est continue en a et que $a_0 = f(a)$. Par conséquent, $f(x) \underset{a}{=} f(a) + a_1(x-a) + o(x-a)$. Ainsi, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{=} a_1 + o(1) \xrightarrow[x\to a]{} a_1$. On en déduit que f est dérivable et que $a_1 = f'(a)$. ■

Proposition n° 4 : translation d'un développement limité

$f(x) \underset{a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ $(DL_n(a)$ de $f)$ ssi $f(a+h) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$ $(DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h))$

Exemple 5. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$

Remarque 5. Les $DL_n(0)$ seront les seuls à apprendre. Car, grâce à eux, on pourra trouver des $DL_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Péril imminent au $\mathcal{o}$

Dans un DL, n'oubliez jamais le $\mathcal{o}$, par exemple, « $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$ » est horriblement faux !

2.2 $DL_n(a)$ obtenus par primitive

Théorème n° 1 : primitive d'un développement limité

Si $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ a un $DL_{n-1}(a)$: $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + \mathcal{o}((x-a)^{n-1})$, alors F, une primitive de f, admet un $DL_n(a)$:

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \mathcal{o}((x-a)^n)$$

Démonstration du théorème n° 1 : Posons, pour $x \in I$, $g(x) = F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$, notons que g est dérivable sur I et que $g'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k = \mathcal{o}((x-a)^{n-1})$. Comme g est continue sur $[\,a\,;x\,]$ (ou $[\,x\,;a\,]$), dérivable sur $]\,a\,;x\,[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in \,]\,a\,;x\,[$ tel que :

$$\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^n} = \frac{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}{(x-a)^{n-1}} = \frac{g'(c_x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{\mathcal{o}((c_x-a)^{n-1})}{(c_x-a)^{n-1}} \times \frac{(c_x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

En effet, $\dfrac{\mathcal{o}((c_x-a)^{n-1})}{(c_x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et $x \mapsto \dfrac{(c_x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}$ est bornée. Ceci démontre que $g(x) - g(a) = \mathcal{o}((x-a)^n)$. Donc

$$F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} = \mathcal{o}((x-a)^n)$$

D'où le résultat ■

Remarque 6. Ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$ lors de la primitivation d'un DL.

Exemples importants de DL obtenus par primitive d'un DL connu (à connaître par cœur)

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + \mathcal{o}(x^n) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + \mathcal{o}(x^n) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \mathcal{o}(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathcal{o}(x^{2n+1}) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{o}(x^{2n+1})$ $\quad DL_{2n+1}(0)$

Démonstration du DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$: En effet, on sait que $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \mathcal{o}(x^{n-1})$. En notant $x \mapsto \ln(1+x)$ une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et utilisant le théorème de primitivation d'un DL, on obtient

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathcal{o}(x^n)$$

2.3 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème n° 2 : formule de Taylor-Young

Une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ admet un $DL_n(a)$: $\displaystyle f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Démonstration du théorème n° 2 : Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$:

$$«\forall f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \qquad f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)»$$

Si $f \in \mathscr{C}^0$ sur I, alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, posons $g = f' \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $g(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors en appliquant le théorème de primitivation d'un développement limité,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie ■

Exemples d'utilisation de la formule de Taylor-Young (DL à connaître par cœur)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions, exponentielle et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, cos et sin admettent des DL en 0 :

- $\displaystyle \mathrm{e}^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\displaystyle \cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ $\qquad DL_{2n}(0)$
- $\displaystyle \sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ $\qquad DL_{2n+1}(0)$
- $\displaystyle (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)\right)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$

  $\displaystyle (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Exemple 6. Si $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, alors $f^{(k)}(0) = k!$

2.4 Opérations sur les $DL_n(0)$

Proposition n° 5 opérations sur les développements limités

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ admettant des $DL_n(0)$: $\displaystyle f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $\displaystyle g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un $DL_n(0)$: $\displaystyle (\lambda f + g)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k)x^k + o(x^n)$
2. fg admet un $DL_n(0)$: $\displaystyle f(x)g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k + o(x^n)$
3. De plus, si $b_0 \neq 0$, alors $1/g$ et f/g admettent des $DL_n(0)$.

Exemples 7.

1. Donner le $DL_3(0)$ de $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.
2. Trouver $DL_4(0)$ de $f\colon x \mapsto \cos^2(x)$
3. Trouver le $DL_2(0)$ de $\tan^2$ puis le $DL_5(0)$ de tan.
4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2})/x^3$

Exemples de nouveaux développements limités à connaître

1. $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ $\qquad DL_{2n}(0)$
2. $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ $\qquad DL_{2n+1}(0)$
3. $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7)$ $\qquad DL_7(0)$ $\qquad$ à connaître au moins à l'ordre 3

Comment calculer le développement limité d'une composée ?

Soient f et g deux fonctions ayant des DL en 0 et $f(0) = 0$. Pour faire le $DL_n(0)$ de $g \circ f$:

1. Écrire le $DL_n(0)$ de f, poser une nouvelle variable $u = f(x)$ avec $u \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = 0$ (f continue).
2. Par produits successifs, calculer les $DL_n(0)$ de u^k. Soit p le plus petit entier tel que $o(u^p) \underset{0}{=} o(x^n)$.
3. Écrire le $DL_p(0)$ de g : $g(u) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + o(u^p)$ puis remplacer u^k par son $DL_n(0)$ et $o(u^p)$ par $o(x^n)$.

Exemples 8.

1. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(\sin(x))$
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$
3. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$

3 Relation d'équivalence : $\sim$

Définition de la relation d'équivalence

On dit que f est **équivalente** à g en a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Remarque 7. Si $a \in \mathbb{R}$, $\qquad f \underset{a}{\sim} g \quad \iff \quad \exists\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\, a-\delta \,;\, a+\delta \,] \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$

Exemples 9. Soit $f(x) = x^2 + x + 1/x$ et $g(x) = \sqrt{x^2+3}$. Chercher des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$ et de g en $\pm\infty$.

Péril imminent : les équivalents à zéro, sont à bannir

Les équivalents à 0 ou $+\infty$ n'existent pas.

Proposition n° 6 : propriétés des équivalents

Soient f, g, h, $k\colon I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité)
2. si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie)
3. $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité)
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ et $f/h \underset{a}{\sim} g/k$
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (si $f > 0$ et $g > 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$)
6. $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$.
7. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f)$ ssi $h \underset{a}{=} o(g)$
8. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ssi $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$

Remarque 8. On utilise la propriété 7. pour simplifier un o. Par exemple, si $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x+1)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Exemples 10. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$, $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (équivalents usuels à connaître)

Attention aux compositions d'équivalents

Il n'y a pas de résultat du genre : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

Exemple 11. On a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Que pouvez-vous dire de $x \mapsto e^{x^2+x}$ et $x \mapsto e^{x^2}$?

Péril imminent pas d'addition des équivalents

Les sommes d'équivalents c'est mal. (à recopier autant de fois que nécessaire)

Exemple 12. $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, et $-x \underset{+\infty}{\sim} -1 - x$, à votre avis $(x+1) - x$ est équivalent à $x + (-1 - x)$ en $+\infty$?

Remarque 9. En cas d'envie pressante d'addition (retenez-vous), écrire des DL et les sommer.

Proposition n° 7 : propriétés des équivalents

Supposons que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
2. f et g ont le même signe au voisinage de a.
3. Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a, alors $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. Si $u(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, alors $f(u(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(u(t))$

Exemples 13. Déterminer des équivalents des fonctions/suites suivantes au point donné :

1. $f(x) = \sqrt{x^3+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
2. $g(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$
3. $h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$ en 0
4. $k(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$ en 0
5. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \ln(n)$ en $+\infty$
6. $\sin(1/n)$ quand $n \to +\infty$
7. $\sin(2x)$ en 0
8. $\sin(1+x)$ en -1
9. $\underline{H(\omega)} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ quand $\omega \to +\infty$.

Remarque 10. Écrire $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$ est juste, tout comme $e^x \underset{0}{\sim} 1 + \dfrac{x}{\pi}$ mais ceci est maladroit, l'équivalent nous renseigne seulement sur le terme prépondérant. Ici, on écrira donc $e^x \underset{0}{\sim} 1$.

4 Relation de domination : $\mathcal{O}$

Définition de la relation de domination

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a si f/g est bornée au voisinage de a.
On note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ et on lit «f est un grand O de g au voisinage de a»

Remarque 11. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\delta\,;a+\delta] \setminus \{a\} \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|$

Exemples 14. $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{e}^x)$. Comparer $x \mapsto x^3 \sin(x)$ et $x \mapsto x^3$ en 0.

Proposition n° 8 : propriétés des $\mathcal{O}$

Soient f, g, h, $k\colon I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ ou une extrémité de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$.
3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $f + \lambda h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.
5. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$.
6. f est bornée au voisinage de a ssi $f = \mathcal{O}(1)$.

Remarque 12. Écrire $\sin(x) \underset{0}{=} x + \mathcal{O}(x^3)$ est plus précis que d'écrire $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$ ou même $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

5 Applications des développements limités

Définition d'un développement asymptotique

Un développement asymptotique est comme un développement limité mais x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme $1/x^p$. Dans les faits, on fait comme si on avait des DL.

Exemples 15.

1. Développement asymptotique à la précision de $o(1/n^2)$ de $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})_n$. $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
2. Développement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ en $+\infty$ à la précision de $o(x^{-3})$. $\dfrac{1}{1+x} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + o(x^{-3})$.

Péril imminent ne pas appliquer un développement en 0 en un autre point

Écrire $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$ est faux !

Une limite classique à connaître

Soit $x \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $(u_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Démonstration de la limite classique : Notons que pour $n > -x$, $1 + \dfrac{x}{n} > 0$, ainsi, $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\right)$. Faisons un développement asymptotique à l'ordre 0 de u_n.

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$u_n = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\right) = \exp(x + o(1))$$

Or $x + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, par continuité de l'exponentielle en x, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(x)$.

Comment trouver un équivalent ? (f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL)

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p$

Comment trouver une limite ?

f a la même limite en a qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

Exemple 16. Quelle est la limite de $\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ en 0 ?

Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL ?

Si f a un $DL_p(a)$: $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+a_p(x-a)^p+o((x-a)^p)$ avec $a_p\neq 0$ et $p\geqslant 2$.
Au voisinage de a, $f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$.
On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en a (voir figure 2).
Si jamais, $f'(a)=0$, on a un point critique, suivant la parité de p et du signe de a_p, soit on a un maximum local, soit un minimum local, soit un point d'inflexion.

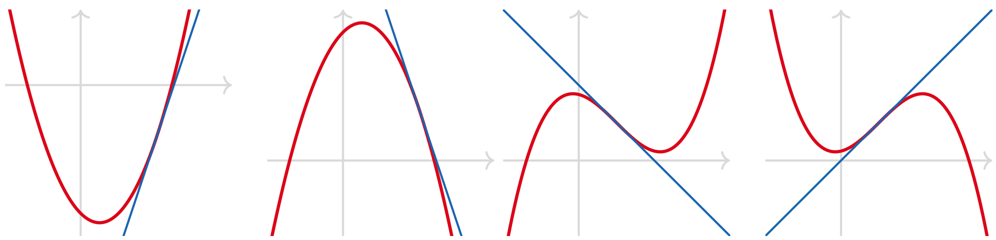
(a) $a_p>0$ et p pair (b) $a_p<0$ et p pair (c) $a_p>0$ et p impair (d) $a_p<0$ et p impair

FIGURE 2 – Différents cas, la position de la tangente dépend du signe de a_p et de la parité de p.

Exemple 17. Posons $f\colon x\mapsto 1+2x-5\sqrt{1+x^3+x^4}$, tracer l'allure de f au voisinage de 0 ?

Définition d'une asymptote

On dit que $x\mapsto ax+b$ est une **asymptote** de f en $+\infty$ si $f(x)-(ax+b)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (idem en $-\infty$).

Comment trouver l'asymptote de f en $+\infty$?

1. Trouver un développement asymptotique de f de la forme $f(x)\underset{+\infty}{=}\alpha x+\beta+\gamma x^{-p}+o(x^{-p})$ avec $p>0$.
2. Alors $x\mapsto\alpha x+\beta$ est une asymptote de f en $+\infty$.
3. Si $\gamma\neq 0$, le signe de γ permet de connaître la position de f par rapport à son asymptote.

Remarque 13. Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}+\infty$ (ou $-\infty$) avec $a\in\mathbb{R}$, alors $x=a$ est une asymptote verticale de f.

Exemple 18. Montrer que $f\colon x\mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?

Soit $f\colon I\to J$ bijective.

1. Justifier avec la formule de Taylor-Young que f^{-1} admet un $DL_n(a)$: $f^{-1}(x)\underset{0}{=}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k+o((x-a)^n)$.
   Si $a=0$ et f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire et donc $a_{2k}=0$ pour tout k.
2. Écrire le développement limité de f.
3. Par composition, écrire le développement limité de $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}$. Conclure par unicité des coefficients.

Exemple 19. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et trouver le $DL_3(0)$ de sh^{-1}. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0 ; 3]\!]$.

Comment déterminer un DA d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?
On effectue un DA à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis puis on recommence.

Exemple 20. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, montrer que $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$, puis trouver un DA à la précision $o(1/n)$.

Solution de l'exemple 20 : On procède par étapes de façon à obtenir des développements asymptotiques de plus en plus précis :

1. Montrons que $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$ par récurrence. Premièrement, $u_0 = 0 \in [\![-1 ; 0]\!]$ et $u_1 = 1 \in [\![0 ; 1]\!]$. Secondement, soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$, alors $\sqrt{n-1+n^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{n+n^2}$. De plus, $\sqrt{n+n^2} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$, et $\sqrt{n-1+n^2} \geqslant \sqrt{n^2} = n$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1$.
2. Comme $n - 1 \sim n$, on en déduit par encadrement que $u_n \sim n$, autrement dit que $u_n = n + o(n)$.
3. Ainsi,
$$u_{n+1} = \sqrt{n + o(n) + n^2} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right)} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}$$
On pose alors $u = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc $o(u) = o(\frac{1}{n})$, et on applique le développement limité : $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o(u)$, ainsi :
$$u_{n+1} = n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o(1/n)\right) + o(\frac{1}{n})\right] = n + \frac{1}{2} + o(1)$$
En remplaçant n par $n-1$, on trouve $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.
4. On réinjecte ce développement asymptotique :
$$u_{n+1} = \sqrt{n - \frac{1}{2} + o(1) + n^2} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
On pose alors $v = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $v^2 = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$, donc $o(v^2) = o(\frac{1}{n^2})$. On applique donc le développement limité : $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} - \frac{v^2}{8} + o(v^2)$:
$$u_{n+1} = n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) + o(\frac{1}{n^2})\right] = n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
En remplaçant n par $n-1$, on trouve $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Or, $\frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) \sim \frac{3}{8n}$. Donc $\frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{3}{8n} + o(\frac{1}{n})$ Dès lors, $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On peut évidemment continuer ce procédé pour obtenir des DA encore plus précis, au prix de calculs plus longs.

Exemple 21.
1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)_n$ puis que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Solution de l'exemple 21 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f \colon x \mapsto x^3 + nx - 1$. Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + n \geqslant 0$. Si $n = 0$, alors $f'(x) = 3x^2 = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' s'annule une seule fois. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Dans les deux cas, f est strictement croissante. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une unique solution.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est continue et strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$, f réalise une bijection de $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ vers
$$f\left(\left[0\,;\frac{1}{n}\right]\right) = \left[f(0)\,;f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left[-1\,;\frac{1}{n^3}\right]$$
Comme $0 \in \left[-1\,;n^{-3}\right]$, on peut en déduire que 0 admet un unique antécédent dans $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ par f. Et cet antécédent est x_n, donc $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 - (x_n)^3$. Or $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par produit, ${x_n}^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, $\dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ceci prouve que $x_n \sim \frac{1}{n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \sim \frac{1}{n}$, par puissance, on a ${x_n}^3 \sim \frac{1}{n^3}$ donc
$$\frac{1}{n} - x_n = \frac{1 - nx_n}{n} = \frac{(x_n)^3}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^3}}{n} = \frac{1}{n^4}$$
5. D'après les propriétés sur les équivalents, on en déduit que $\frac{1}{n} - x_n = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, ainsi, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.