Chapitre 14
Analyse asymptotique

Objectifs :
- Définir les $\sim$, $\mathcal{o}$ et $\mathcal{O}$ (déjà vus pour les suites) pour les fonctions.
- Définir les développements limités et établir les développements usuels à connaître par cœur.
- Savoir les utiliser pour le calcul de limites et les études de fonctions.

Un développement limité d'une fonction f en un point a à l'ordre n est, dit grossièrement, une fonction polynomiale (si elle existe) de degré au plus n qui approxime le mieux f au voisinage de a.

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $n \in \mathbb{N}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou une extrémité de I, f et g, h et k définies sur $I \backslash \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on divise par g, on sous-entend que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

1 Fonctions négligeables : $\mathcal{o}$

Définition d'une fonction négligeable devant une autre

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

On note $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{o}(g(x))$, lire «*$f$ est un petit o de g au voisinage de a*».

Exemple 1. $x^2 \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(x^4)$ $\qquad x^4 \underset{0}{=} \mathcal{o}(x^2)$

Démonstration de l'exemple 1 : En effet, $x^2/x^4 = x^{-2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x^4/x^2 = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Remarque 1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a-\delta\,;a+\delta\,] \backslash \{a\} \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Exemple 2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $f(x) \underset{a}{=} \ell + \mathcal{o}(1)$.

Attention $\mathcal{o}(g)$ est une notation

Si $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ et $h \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ n'implique pas que $f = h$. De plus, $f \underset{a}{=} h + \mathcal{o}(g)$ veut dire $f = h + k$ où $k \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$.

Proposition n° 1

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$. — Bref, $\mathcal{o}(\lambda g) = \mathcal{o}(g)$
2. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ alors $\lambda f + h \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) — Bref, $\lambda \mathcal{o}(g) + \mathcal{o}(g) = \mathcal{o}(g)$
3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{o}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(h)$. — Bref, $\mathcal{o}(\mathcal{o}(h)) \underset{a}{=} \mathcal{o}(h)$
4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{o}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{o}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{o}(gk)$. — Bref, $\mathcal{o}(g)\mathcal{o}(k) = \mathcal{o}(gk)$
5. $f = \mathcal{o}(h)$ si et seulement si $fg = \mathcal{o}(hg)$. — Bref, $g\mathcal{o}(h) = \mathcal{o}(gh)$
6. $f = \mathcal{o}(g + \mathcal{o}(g))$ si et seulement si $f = \mathcal{o}(g)$. — Bref, $\mathcal{o}(g + \mathcal{o}(g)) = \mathcal{o}(g)$

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. $\dfrac{f}{g} = \lambda \times \dfrac{f}{\lambda g} \underset{a}{\rightarrow} 0 \times 0 = 0$.
2. $\dfrac{\lambda f + h}{g} = \lambda \dfrac{f}{g} + \dfrac{h}{g} \underset{a}{\rightarrow} \lambda 0 + 0 = 0$.
3. $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h} \underset{a}{\rightarrow} 0 \times 0 = 0$
4. $\dfrac{fh}{gk} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{h}{k} \underset{a}{\rightarrow} 0 \times 0 = 0$
5. $\dfrac{fg}{hg} = \dfrac{f}{h}$
6. $\dfrac{f}{g + \mathcal{o}(g)} = \dfrac{f}{g(1 + \mathcal{o}(1))} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{1}{(1 + \mathcal{o}(1))}$. Or $1 + \mathcal{o}(1) \underset{a}{\rightarrow} 1$. Ainsi, si $f = \mathcal{o}(g)$, on en déduit que $\dfrac{f}{g + \mathcal{o}(g)} \underset{a}{\rightarrow} 0$, donc $f = \mathcal{o}(g + \mathcal{o}(g))$. De même, si $f = \mathcal{o}(g + \mathcal{o}(g))$, alors $\dfrac{f}{g + \mathcal{o}(g)} \underset{a}{\rightarrow} 0$. Donc $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{g + \mathcal{o}(g)} \times (1 + \mathcal{o}(g)) \underset{a}{\rightarrow} 0 \times 1 = 0$. Ainsi, $f = \mathcal{o}(g)$.

■

Remarque 2. Les croissances comparées s'interprètent avec les $\mathcal{o}$: soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. Si $\beta > 0$, $\quad \ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(x^\beta) \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(\mathrm{e}^{\beta x})$
2. Si $\alpha < \beta$, $\quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(x^\beta)$, $\quad x^\beta \underset{0}{=} \mathcal{o}(x^\alpha)$, $\quad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(\ln(x)^\beta)$ et $\mathrm{e}^{\alpha x} \underset{+\infty}{=} \mathcal{o}(\mathrm{e}^{\beta x})$

Exemple 3. Si $f(x) \underset{0}{=} 51x^3 + \mathcal{o}(x^2) + \mathcal{o}(x^3) + 2 + x + \mathcal{o}(x^2 + x^4)$, simplifier cette écriture.

2 Développements limités en un point $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, a est un réel appartenant à I.

2.1 Définitions et première propriétés

Définition d'un développement limité

On dit que f a un **développement limité** à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

La fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ est la **partie régulière** du développement limité.

On note $DL_n(a)$ un développement limité à l'ordre n en a.

Exemple 4. Soit $f(x) = 1 + 5x + 3x\sqrt{x}$.

Exemples importants à connaître sans hésitation

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
- $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ $\qquad DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration des exemples importants de DL : Si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, Donc $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.
Or, $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$. Il vient $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

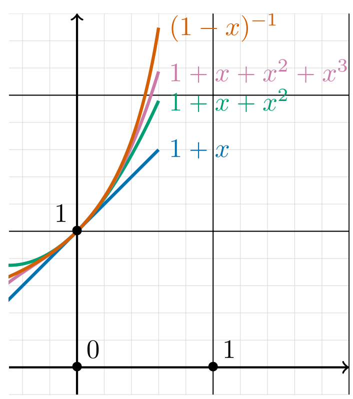


FIGURE 1 – Plusieurs polynômes approximant $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0.

Exemple 5. Si $f(x) \underset{a}{=} 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 - 13(x-a)^3 + o((x-a)^3)$, alors $f(x) \underset{a}{=} 3 + 5(x-a) + 8(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

Remarque 3. Si la fonction f admet un $DL_n(a)$ et si $m < n$ alors elle admet un $DL_m(a)$. Il suffit de tronquer le développement limité $DL_n(a)$ à l'ordre souhaité.

Démonstration de la remarque 3 : En effet, si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$. Alors,

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Or pour $k \geqslant m+1$, $(x-a)^k \underset{a}{=} o((x-a)^m)$, en particulier $(x-a)^n \underset{a}{=} o((x-a)^m)$, donc $o((x-a)^n) \underset{a}{=} o((x-a)^m)$. Ainsi, par une combinaison linéaire de fonctions qui sont négligeables devant $x \mapsto (x-a)^m$ en a, on en déduit que $\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)) \underset{a}{=} o((x-a)^m)$. Dès lors, $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k + o((x-a)^m)$.

Proposition n° 2 : au plus unicité du développement limité

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration de la proposition n° 2 : En retranchant, on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $k \in [\![0\,; n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Posons $A = \{k \in [\![0\,; n]\!],\ a_k \neq b_k\}$. A est un ensemble fini non vide. Notons $k_0 = \min(A)$, alors pour tout tout $k \in [\![0\,; k_0 - 1]\!]$, $a_k = b_k$. On obtient alors $\sum_{k=k_0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n) = 0$. Notons que pour tout $k \in [\![k_0+1\,; n]\!]$, $(x-a)^k \underset{a}{=} o((x-a)^{k_0})$ De même, $o((x-a)^n) \underset{a}{=} o((x-a)^{k_0})$. On a ainsi, $(a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0} + o((x-a)^{k_0}) = 0$. En divisant par $(x-a)^{k_0}$, on obtient $a_{k_0} - b_{k_0} = o(1)$, d'où $\frac{a_{k_0} - b_{k_0}}{1} \underset{a}{\to} 0$. Donc $a_{k_0} - b_{k_0}$ est une constante qui tend vers 0 quand $x \to a$. Donc $a_{k_0} = b_{k_0}$. Ce qui est absurde. ■

Remarque 4. Si f est paire (resp. impaire) et a un $DL_n(0)$, alors les coefficients d'indices impairs (resp. pairs) sont nuls.

Démonstration de la remarque 4 : En effet, si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et que f est paire, alors

$$f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k + o((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = a_k(-1)^k$. Quand k est impair, on obtient $a_k = -a_k$ soit $a_k = 0$, ainsi, tous les termes d'indices impairs sont nuls. On démontre la même chose, pour une fonction impaire.

Proposition n° 3 : condition nécessaire et suffisante pour avoir un $DL_0(a)$ ou un $DL_1(a)$

1. f admet un $DL_0(a)$ ssi f est continue en a. Alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$.
2. f admet un $DL_1(a)$ ssi f est dérivable en a. Alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Supposons que f soit continue en a, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Dès lors, $f(x) = f(a) + o(1)$. Ainsi, f bien un développement limité en a à l'ordre 0. Supposons que f admette un développement limité en a à l'ordre 0. Ainsi, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(1)$, on obtient ainsi que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} a_0$. D'où,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \qquad |x-a| \leqslant \delta \quad \implies |f(x) - a_0| \leqslant \varepsilon$$

   Or $a \in D$ et $|a-a| \leqslant \delta$ (quelque soit $\delta > 0$), ainsi on obtient $|f(a) - a_0| \leqslant \varepsilon$. Et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $f(a) = a_0$. Par conséquent, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ et donc f est continue en a.

2. Supposons que f soit dérivable en a, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$. Donc, $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \underset{a}{=} f'(a) + o(1)$, donc $f(x) - f(a) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + (x-a)o(1) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a)$. D'où $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, donc f admet un développement limité en a à l'ordre 1 Réciproquement, supposons que f admet un $DL_0(a)$: il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$. Par troncature d'un développement limité, $f(x) \underset{a}{=} a_0 + o(x-a)$, donc en appliquant le point 1, on obtient que f est continue en a et que $a_0 = f(a)$. Donc, $f(x) \underset{a}{=} f(a) + a_1(x-a) + o(x-a)$. Ainsi, $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \underset{a}{=} a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to a]{} a_1$. On en déduit que f est dérivable et que $a_1 = f'(a)$. ■

Proposition n° 4 : translation d'un développement limité

$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ ($DL_n(a)$ de f) ssi $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$ ($DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$)

Exemple 6. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$

Remarque 5. Les $DL_n(0)$ seront les seuls à apprendre. Car, grâce à eux, on pourra trouver des $DL_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Péril imminent au o

Dans un DL, n'oubliez jamais le o, par exemple, « $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$ » est horriblement faux !

2.2 $DL_n(a)$ obtenus par primitive

Théorème n° 1 : primitive d'un DL

Si $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ un $DL_{n-1}(a)$: $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$, alors F, une primitive de f, admet un $DL_n(a)$:

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^n)$$

Démonstration du théorème n° 1 : Posons, $g(x) = F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$, notons que g est dérivable sur I et que $g'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k = o((x-a)^{n-1})$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in \,]\,a\,;x\,[$ tel que :

$$\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^n} = \frac{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}{(x-a)^{n-1}} = \frac{g'(c_x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{o((c_x-a)^{n-1})}{(c_x-a)^{n-1}} \times \frac{(c_x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

En efet, $\dfrac{o((c_x-a)^{n-1})}{(c_x-a)^{n-1}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et $x \mapsto \dfrac{(c_x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}$ est bornée. Ceci démontre que $g(x) - g(a) = o((x-a)^n)$. Donc, $F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} = o((x-a)^n)$. Par conséquent, $F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$. ■

Remarque 6. Ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$ lors de la primitivation d'un DL.

Exemples importants de DL obtenus par primitive d'un DL connu (à connaître par cœur)

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$ $\qquad DL_n(0)$
- $\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$ $\qquad DL_{2n+1}(0)$

Démonstration du DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$: En effet, on sait que $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$. En notant $x \mapsto \ln(1+x)$ une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et utilisant le théorème précédent, on obtient $\ln(1+x) \underset{0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$.

2.3 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème n° 2 : formule de Taylor-Young

Une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration du théorème n° 2 : Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(n)$: «Pour tout $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$». Si $f \in \mathscr{C}^0$ sur I, alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, posons $g = f' \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $g(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors en appliquant le théorème de primitivation d'un développement limité,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie ■

Exemples d'utilisation de la formule de Taylor-Young (DL à connaître par cœur)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions, exponentielle et $x \mapsto (1+x)^\alpha$, cos et sin admettent des DL en 0 :

- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $\quad DL_n(0)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ $\quad DL_{2n}(0)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ $\quad DL_{2n+1}(0)$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)\right)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ $\quad DL_n(0)$

  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Exemple 7. Si $f\colon x \mapsto \frac{1}{1-x}$, alors $f^{(k)}(0) = k!$.

2.4 Opérations sur les $DL_n(0)$

Proposition n° 5 opérations sur les développements limités

Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ admettant des $DL_n(0)$: $\quad f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad$ et $\quad g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un $DL_n(0)$: $\quad (\lambda f + g)(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k)x^k + o(x^n)$
2. fg admet un $DL_n(0)$: $\quad f(x)g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k + o(x^n)$
3. De plus, si $b_0 \neq 0$, alors $1/g$ et f/g admettent des $DL_n(0)$.

Exemple 8.

1. Donner le $DL_3(0)$ de $f\colon x \mapsto e^x \sin(x)$.
2. Trouver $DL_4(0)$ de $f\colon x \mapsto \cos^2(x)$
3. Trouver le $DL_2(0)$ de $\tan^2$ puis le $DL_5(0)$ de tan.
4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2})/x^3$

Exemples de nouveaux développements limités à connaître

- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ $\quad DL_{2n}(0)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ $\quad DL_{2n+1}(0)$
- $\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$

  À connaître au moins à l'ordre 3

Comment calculer le développement limité d'une composée ?

Soient f et g deux fonctions ayant des DL en 0 et $f(0)=0$. Pour faire le $DL_n(0)$ de $g\circ f$:

1. Écrire le $DL_n(0)$ de f, poser une nouvelle variable $u=f(x)$ avec $u \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)=0$ (f continue).
2. Par produits successifs, calculer les $DL_n(0)$ de u^k. Soit p le plus petit entier tel que $\mathcal{O}(u^p) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^n)$.
3. Écrire le $DL_p(0)$ de g : $g(u) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + \mathcal{O}(u^p)$ puis remplacer u^k par son $DL_n(0)$ et $\mathcal{O}(u^p)$ par $\mathcal{O}(x^n)$.

Exemple 9.
1. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(\sin(x))$
3. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$

3 Fonctions équivalentes : $\sim$

Définition de l'équivalence

On dit que f est **équivalente** à g en a si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Remarque 7. Si $a\in\mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{\sim} g \quad \iff \quad \exists\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I\cap[\,a-\delta\,;a+\delta\,] \quad |f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|$

Exemple 10. Soit $f(x)=x^2+x+1/x$ et $g(x)=\sqrt{x^2+3}$ Chercher des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$ et de g en $\pm\infty$.

Péril imminent : les équivalents à zéro, sont à bannir

Les équivalents à 0 ou $+\infty$ n'existent pas.

Proposition n° 6 : propriétés des équivalents

Soient f, g, h, $k\colon I\to\mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a et $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. $f \underset{a}{\sim} f$
2. si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$,
3. $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ et $f/h \underset{a}{\sim} g/k$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (si $f>0$ et $g>0$ ou $\alpha\in\mathbb{N}$)
6. $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g+\mathcal{O}(g)$.
7. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$ ssi $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$
8. Soit $\ell\in\mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ ssi $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

Remarque 8. On utilise la propriété 7 pour simplifier un $\mathcal{O}$. Par exemple, si $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x+1)$ alors $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x)$.

Exemple 11. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $\quad \cos(x) \underset{0}{\sim} 1$, $\quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $\quad \mathrm{e}^x-1 \underset{0}{\sim} x$, $\quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $\quad$ si $\alpha\neq 0$, $(1+x)^\alpha-1 \underset{0}{\sim} \alpha x$, $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (équivalents usuels à connaître)

Attention aux compositions d'équivalents

Il n'y a pas de résultat du genre : si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h\circ f \underset{a}{\sim} h\circ g$.

Exemple 12. On a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Que pouvez-vous dire de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$?

Péril imminent pas d'addition des équivalents

Les sommes d'équivalents c'est mal. (à recopier autant de fois que nécessaire)

Exemple 13. $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$, et $-x \underset{+\infty}{\sim} -1-x$, à votre avis $(x+1)-x$ est équivalent à $x+(-1-x)$ en $+\infty$?

Remarque 9. En cas d'envie pressante d'addition (retenez-vous), écrire des DL et les sommer.

Proposition n° 7 : propriétés des équivalents

Supposons que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
2. f et g ont le même signe au voisinage de a.
3. Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a, alors $h(x) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. Si $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$, alors $f(u(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(u(x))$

Exemple 14. Déterminer des équivalents des fonctions/suites suivantes au point donné :

1. $f(x) = \sqrt{x^3+1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
2. $g(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$
3. $h(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$ en 0
4. $k(x) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$ en 0
5. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + \ln(n)$ en $+\infty$
6. $\sin(1/n)$ quand $n \to +\infty$
7. $\sin(2x)$ en 0
8. $\sin(1+x)$ en -1
9. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$ quand $\omega \to +\infty$.

Remarque 10. Écrire $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1+x$ est juste, tout comme $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1+\dfrac{x}{\pi}$ mais ceci est maladroit, l'équivalent nous renseigne seulement sur le terme prépondérant. Ici, on écrira donc $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1$.

4 Domination : $\mathcal{O}$

Définition de la domination

On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a si f/g est bornée au voisinage de a.
On note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ et on lit «f est un grand O de g au voisinage de a»

Remarque 11. Si $a \in \mathbb{R}$, $\quad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \cap [\,a-\delta\,;a+\delta\,]\backslash\{a\} \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|$

Exemple 15. $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\mathrm{e}^x)$. Comparer $x \mapsto x^3\sin(x)$ et $x \mapsto x^3$ en 0.

Proposition n° 8 : propriétés des $\mathcal{O}$

Soient f, g, h, $k\colon I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ ou une extrémité de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$.
3. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ alors $f + \lambda h \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
4. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.
5. Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et si $h \underset{a}{=} \mathcal{O}(k)$ alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gk)$.
6. f est bornée au voisinage de a ssi $f = \mathcal{O}(1)$.

Remarque 12. Écrire $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ est plus précis que d'écrire $\sin(x) = x + o(x^2)$ ou même $\sin(x) = x + o(x)$.

5 Application des développements limités

Définition d'un développement asymptotique

Un développement asymptotique est comme un développement limité mais x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ et il peut y avoir des termes non polynomiaux comme $1/x^p$. Dans les faits, on fait comme si on avait des DL.

Exemple 16.
1. Développement asymptotique à la précision de $o(1/n^2)$ de $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})_n$. $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
2. Développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en $+\infty$ à la précision de $o(x^{-3})$. $\frac{1}{1+x} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o(x^{-3})$.

Une limite classique à connaître

Soit $x \in \mathbb{R}$, trouver la limite de $(u_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Démonstration de la limite classique : Notons que pour $n > -x$, $1 + \frac{x}{n} > 0$, ainsi, $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$. Faisons un développement asymptotique à l'ordre 0 de u_n.

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$u_n = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\right) = \exp(x + o(1))$$

Or $x + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, par continuité de l'exponentielle en x, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(x)$.

Comment trouver un équivalent ? (f est équivalente à son premier terme non nul dans son DL)

Si $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Comment trouver une limite ?

f a la même limite en a qu'un équivalent trouvé grâce à la méthode précédente.

Exemple 17. Quelle est la limite de $\frac{\sin(x) - x}{x^3}$ en 0 ?

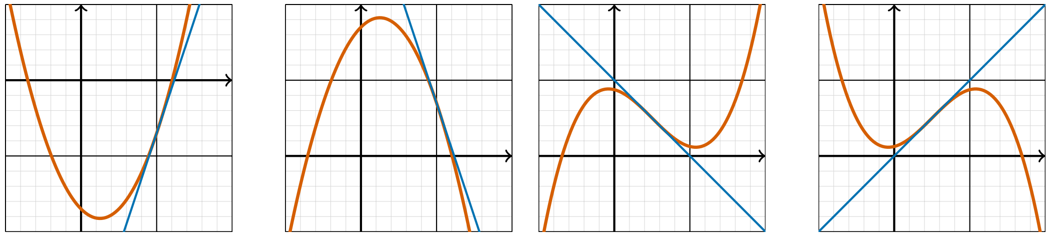
Comment étudier la courbe d'une fonction grâce à un DL ?

Si f a un $DL_p(a)$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geqslant 2$.
Au voisinage de a, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ est du même signe que $a_p(x-a)^p$.
On connaît donc la position de la fonction par rapport à sa tangente en a (voir figure 2).
Si jamais, $f'(a) = 0$, on a un point critique, suivant la parité de p et du signe de a_p, soit on a un maximum local, soit un minimum local, soit un point d'inflexion.

Exemple 18. Posons $f\colon x \mapsto 1 + 2x - 5\sqrt{1 + x^3 + x^4}$, tracer l'allure de f au voisinage de 0 ?

Définition d'une asymptote

On dit que $x \mapsto ax + b$ est une **asymptote** de f en $+\infty$ si $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (idem en $-\infty$).



(a) $a_p > 0$ et p pair (b) $a_p < 0$ et p pair (c) $a_p > 0$ et p impair (d) $a_p < 0$ et p impair

FIGURE 2 – Différents cas, la position de la tangente dépend du signe de a_p et de la parité de p.

Comment trouver l'asymptote de f en $+\infty$?

1. Trouver un développement asymptotique de f de la forme $f(x) \underset{+\infty}{=} \alpha x + \beta + \gamma x^{-p} + o(x^{-p})$ avec $p > 0$.
2. Alors $x \mapsto \alpha x + \beta$ est une asymptote de f en $+\infty$.
3. Si $\gamma \neq 0$, le signe de γ permet de connaître la position de f par rapport à son asymptote.

Remarque 13. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ (ou $-\infty$) avec $a \in \mathbb{R}$, alors $x = a$ est une asymptote verticale de f.

Exemple 19. Montrer que $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote.

Comment déterminer le développement limité d'une fonction réciproque ?

Soit $f : I \to J$ bijective.

1. Justifier avec la formule de Taylor-Young que f^{-1} admet un $DL_n(a)$: $f^{-1}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$.
   Si $a = 0$ et f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire et donc $a_{2k} = 0$ pour tout k.
2. Écrire le développement limité de f.
3. Par composition, écrire le développement limité de $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$. Conclure par unicité des coefficients.

Exemple 20. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et trouver le $DL_3(0)$ de sh^{-1}. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0 ; 3]\!]$.

Comment déterminer un DA d'une suite définie par récurrence ou implicitement ?

On effectue un DA à un très petit ordre (avec une limite, un équivalent, un encadrement), puis on réinjecte ce DA de façon à en obtenir un plus précis puis on recommence.

Exemple 21. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, montrer que $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$, puis trouver un DA à la précision $o(1/n)$.

Démonstration de l'exemple 21 : On procède par étapes de façon à obtenir des développements asymptotiques de plus en plus précis :

1. Montrons que $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$ par récurrence. Premièrement, $u_0 = 0 \in [\![-1 ; 0]\!]$ et $u_1 = 1 \in [\![0 ; 1]\!]$. Secondement, soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $u_n \in [\![n-1 ; n]\!]$, alors $\sqrt{n-1+n^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{n+n^2}$. De plus, $\sqrt{n+n^2} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$, et $\sqrt{n-1+n^2} \geqslant \sqrt{n^2} = n$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1$.
2. Comme $n - 1 \sim n$, on en déduit par encadrement que $u_n \sim n$, autrement dit que $u_n = n + o(n)$.
3. Ainsi,
$$u_{n+1} = \sqrt{n + o(n) + n^2} = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right)} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}$$

On pose alors $u = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc $o(u) = o(\frac{1}{n})$, et on applique le développement limité : $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o(u)$, ainsi :

$$u_{n+1} = n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o(1/n)\right) + o(\frac{1}{n})\right] = n + \frac{1}{2} + o(1)$$

En remplaçant n par $n-1$, on trouve $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.

4. On réinjecte ce développement asymptotique :

$$u_{n+1} = \sqrt{n - \frac{1}{2} + o(1) + n^2} = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

On pose alors $v = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $v^2 = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$, donc $o(v^2) = o(\frac{1}{n^2})$. On applique donc le développement limité : $\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} - \frac{v^2}{8} + o(v^2)$:

$$u_{n+1} = n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) + o(\frac{1}{n^2})\right] = n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En remplaçant n par $n-1$, on trouve $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Or, $\frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) \sim \frac{3}{8n}$. Donc $\frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{3}{8n} + o(\frac{1}{n})$ Dès lors, $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On peut évidemment continuer ce procédé pour obtenir des DA encore plus précis, au prix de calculs plus longs.

Exemple 22. 1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)_n$ puis que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Démonstration de l'exemple 22 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f : x \mapsto x^3 + nx - 1$. Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + n \geqslant 0$. Si $n = 0$, alors $f'(x) = 3x^2 = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' s'annule une seule fois. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Dans les deux cas, f est strictement croissante. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x) \,;\, \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une unique solution.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est continue et strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$, f réalise une bijection de $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ vers

$$f\left(\left[0\,;\frac{1}{n}\right]\right) = \left[f(0)\,; f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left[-1\,;\frac{1}{n^3}\right]$$

Comme $0 \in \left[-1\,; n^{-3}\right]$, on peut en déduire que 0 admet un unique antécédent dans $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ par f. Et cet antécédent est x_n, donc $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 - (x_n)^3$. Or $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par produit, ${x_n}^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ceci prouve que $x_n \sim \frac{1}{n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \sim \frac{1}{n}$, par puissance, on a ${x_n}^3 \sim \frac{1}{n^3}$ donc

$$\frac{1}{n} - x_n = \frac{1 - nx_n}{n} = \frac{(x_n)^3}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^3}}{n} = \frac{1}{n^4}$$

5. D'après les propriétés sur les équivalents, on en déduit que $\frac{1}{n} - x_n = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, ainsi, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.