Chapitre 15

Applications linéaires

Prérequis :

- Ensembles et applications : image d'un ensemble, image réciproque d'un ensemble, injectivité, surjectivité, bijectivité
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Définir les applications linéaires (des fonctions particulières qui vont d'un espace vectoriel à un autre)
- Étude d'applications linéaires particulières

Les applications linéaires sont le chaînon manquant pour comprendre le lien entre espaces vectoriels de dimension finie et matrices.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition d'une application linéaire

1. Une fonction $u\colon E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si $\quad \forall (x, x', \lambda) \in E^2 \times \lambda \in \mathbb{K} \qquad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$
2. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
3. Si $E = F$ et $f \in \mathscr{L}(E, E)$, f est appelée **endomorphisme** de E. On note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$.
4. Si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, alors f est appelée **forme linéaire** sur E.

Exemples 1.

1. Soit $f\colon x \longmapsto 3x$, f est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f\colon (x, y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\Phi\colon f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$.
4. $\Delta\colon \begin{cases} \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \\ f \longmapsto f' \end{cases}$ est linéaire.
5. $f\colon A \longmapsto A^\top$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
6. $f\colon (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques 1. Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on a :

- $u(0_E) = 0_F$
- Pour tout $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(x + x') = u(x) + u(x')$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$
- Pour tout $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E^n$, et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k)$.

Proposition n° 1 : opérations sur les applications linéaires

1. L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, F)$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $\quad g \circ f \in \mathscr{L}(E, G) \quad$ et $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) = g \circ (\lambda f)$.
3. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $(g, h) \in \mathscr{L}(F, G)^2$, alors $\quad (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f \quad$ (distributivité)
4. Si $(g, h) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et $f \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $\quad f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \quad$ (distributivité)

1.2 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Théorème n° 1 : image directe et réciproque d'un SEV par une fonction linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F.

1. L'ensemble $f(A)$ est un SEV de F.
2. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est un SEV de E.

Définition du noyau et de l'image

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On appelle **image de** f l'ensemble de F : $\quad \operatorname{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad y = f(x)\}$
2. On appelle **noyau de** f l'ensemble de E : $\quad \operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

Alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un SEV de E et $\operatorname{Im}(f)$ est un SEV de F.

Exemple 2. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x, x+y, x-y) \end{cases}$. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarques 2.

- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.
- Le théorème 1 fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemples 3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

Solution des exemples 3 : En effet, posons $\varphi\colon P \mapsto P(0)$, alors on a déjà vérifiée que φ était une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$. De plus, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \varphi(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\} = F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Posons maintenant $\psi\colon \begin{cases} \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f'' + f \end{cases}$. Tout d'abord, vérifions l'ensemble d'arrivée, si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $f'' \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tout comme f, ainsi $f'' + f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, si $(f,g) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors

$$\psi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' + (\lambda f + g) = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = \lambda\psi(f) + \psi(g)$$

Par conséquent, $\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. De plus,

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \psi(f) = 0\right\} = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad f'' + f = 0\right\} = G$$

est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition n° 2 : caractérisation de l'injectivité/surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Supposons f surjective et montrons $\mathrm{Im}(f) = F$. Par définition de l'image, $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Soit $y \in F$, alors comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $y \in \mathrm{Im}(f)$, donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$. Dès lors, $\mathrm{Im}(f) = F$.
   Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(f) = F$, et montrons f surjective. Soit $y \in F = \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et ce pour tout $y \in F$, donc f est surjective.
2. Supposons f injective. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E, $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_F$, comme $f(0_E) = 0_F$, on a $f(x) = f(0_E)$. Or, f est injective, donc $x = 0_E \in \{0_E\}$, et ce pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons f injective. Soit $(x,x') \in E^2$. Supposons $f(x) = f(x')$. Montrons $x = x'$, on a alors $f(x) - f(x') = 0_F$. En notant $\lambda = -1$, on a $f(x) + \lambda f(x') = 0_F$, soit $f(x + \lambda x') = 0_F$. Donc $x + \lambda x' \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $x - x' \in \{0_E\}$, d'où, $x = x'$. Ainsi, f est injective. ■

Exemple 4. La fonction $f\colon P \longmapsto P' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ est-elle injective ?

Solution des exemples 4 : Comme $f(1) = 0$, donc $1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et 1 est non nul, donc f n'est pas injective. Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, posons $P = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{K}[X]$, alors $f(P) = P' = Q$. Donc f est surjective.

Définition d'isomorphisme, automorphisme et du groupe linéaire

- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de** E **sur** F et que E et F sont **isomorphes**.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme de** E.
- On appelle **groupe linéaire**, noté $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition n° 3 : composition et inverse d'isomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux isomorphismes :

- $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et $f^{-1} \circ g^{-1}$ est sa bijection réciproque.
- f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration de la proposition n° 3 : Tout d'abord, on sait d'après la proposition 1 que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$. De plus, d'après le cours sur les applications, on sait que la composée de deux bijections est bijective, donc $g \circ f$ est une bijection de E dans G. Ainsi, $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G. De plus, $$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad (g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

Comme $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, on sait déjà que $f^{-1} : F \to E$ est une bijection, montrons donc que f^{-1} est linéaire. Soit $(x,x') \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, montrons que $f^{-1}(\lambda x + x') = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')$. Pour ça, calculons l'image de f de ces deux vecteurs, on a :

$$f(f^{-1}(\lambda x + x')) = \lambda x + x' \qquad \text{et} \qquad f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(x')) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \lambda x + x'$$

Ainsi, $f(f^{-1}(\lambda x + x')) = f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x'))$. Or f est injective (car bijective), on en déduit $f^{-1}(\lambda x + x') = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')$. Alors, f^{-1} est linéaire et bijective, donc un isomorphisme de F vers E. ■

2 Endomorphismes

Proposition n° 4 : propriétés des endomorphismes

Soient $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E)^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$
2. $\lambda f + g \in \mathscr{L}(E)$ $\qquad g \circ f \in \mathscr{L}(E)$
3. $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$ $\qquad$ (Id_E neutre pour $\circ$)
4. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ $\qquad$ (associativité)
5. Si $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathscr{L}(E)$, par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Proposition n° 5 : propriétés de GL(E)

Soient $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$
2. $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$
3. $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$
4. $f^k \in \mathrm{GL}(E)$ si $k \in \mathbb{N}$
5. $f^k = (f^{-1})^{-k} \in \mathrm{GL}(E)$ si $k \in \mathbb{Z}_-$.

2.1 Homothéties

Définition d'une homothétie

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$ est appelée **homothétie** de E de rapport λ.

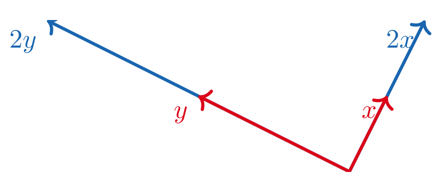


Figure 1 – Homothétie de rapport 2 dans le plan réel.

Proposition n° 6 : propriétés des homothéties

1. Toute homothétie de E est un endomorphisme de E.
2. La somme/composée de deux homothéties est une homothétie de rapport la somme/le produit des rapports.
3. Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E, son inverse est l'homothétie de rapport $1/\lambda$.
4. Les homothéties de E commutent avec tous les endomorphismes de E.

Démonstration de la proposition n° 6 : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \mathrm{Id}_E$ et $\mu \mathrm{Id}_E$ les homothéties de rapports λ et μ.

1. On a déjà montré que Id_E était linéaire (proposition 4 point 1.) et comme $\mathscr{L}(E)$ est un SEV (proposition 1 point 1), $\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, par propriété d'un espace vectoriel : $\lambda \mathrm{Id}_E + \mu \mathrm{Id}_E = (\lambda + \mu)\mathrm{Id}_E$.
$$(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ (\mu \mathrm{Id}_E) = \lambda(\mathrm{Id}_E) \circ (\mu \mathrm{Id}_E) = \lambda(\mu \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = (\lambda\mu)\mathrm{Id}_E$$
3. D'après ce qui précède, on a $\lambda \mathrm{Id}_E \circ \lambda^{-1}\mathrm{Id}_E = (\lambda\lambda^{-1})\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$. De même, $\lambda^{-1}\mathrm{Id}_E \circ \lambda \mathrm{Id}_E = (\lambda^{-1}\lambda)\mathrm{Id}_E$. Ainsi, $\lambda \mathrm{Id}_E$ est bien un automorphisme, et sa bijection réciproque est $\lambda^{-1}\mathrm{Id}_E$.
4. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on a $(\lambda \mathrm{Id}_E) \circ f = \lambda(\mathrm{Id}_E \circ f) = \lambda f = \lambda(f \circ \mathrm{Id}_E) = f \circ (\lambda \mathrm{Id}_E)$. ■

Remarque 3. Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E, alors f est une homothétie (hors programme).

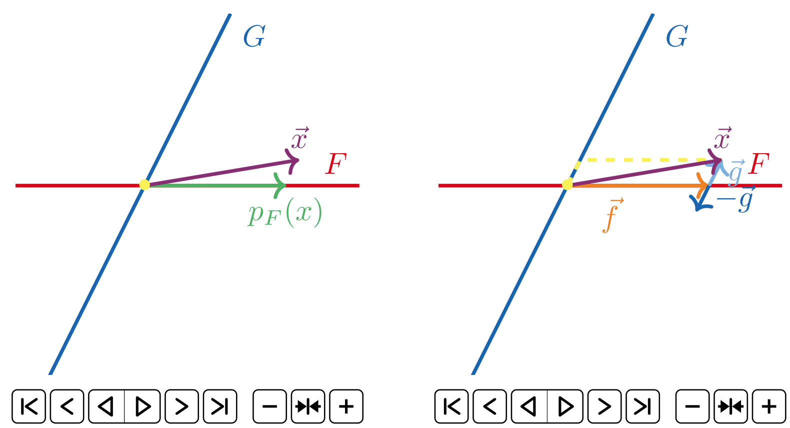
2.2 Projections

Définition de la projection sur un SEV parallèlement à un supplémentaire

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$

$$\forall x \in E \qquad \exists!(f, g) \in F \times G \quad x = f + g$$

On appelle **projection/projecteur** sur F parallèlement à G (ou de direction G) l'application $p_F^G = p_F : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto f \end{cases}$.



(a) Projection sur F parallèlement à G

(b) Symétrie par rapport à F parallèlement à G

Exemple 5. Quelle est la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$?

Solution de l'exemple 5 : On sait que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M = S + A$ avec $S = \dfrac{M + M^\top}{2} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \dfrac{M - M^\top}{2} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $p_{S_n(\mathbb{R})} : M \mapsto \dfrac{M + M^\top}{2}$.

Attention aux projections

Contrairement à la physique/SI, la projection n'est pas forcément orthogonale (le cas orthogonal sera vu après). De plus, la projection d'un vecteur est un vecteur !

Proposition n° 7 : propriétés des projections

Supposons $E = F \oplus G$, notons p_F et p_G les projections associées.

1. $p_F \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_F \circ p_F = p_F$
3. $\mathrm{Id}_E = p_F + p_G$
4. $p_F \circ p_G = 0_{\mathscr{L}(E)}$
5. $\mathrm{Ker}(p_F) = G$
6. $\mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p_F) = F$

Démonstration de la proposition n° 7 :

1. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$, de même il existe un unique $(y_F, y_G) \in F \times G$ tel que $y = y_F + y_G$. Posons
$$z = \lambda x + y = \lambda(x_F + x_G) + y_F + y_G = \underbrace{\lambda x_F + y_F}_{=z_F \in F} + \underbrace{\lambda x_G + y_G}_{=z_G \in G}$$
Ainsi, $z = z_F + z_G$ avec $z_F \in F$ et $z_G \in G$. Ainsi,
$$p_F(\lambda x + y) = p_F(z) = z_F = \lambda x_F + y_F = \lambda p_F(x) + p_F(y)$$
Donc $p_F \in \mathscr{L}(E)$. De plus, $p_F(x) = x_F$, comme $x_F \in F$, on a $x_F = x_F + 0_E$ avec $x_F \in F$ et $0_E \in G$. Ainsi, $p_F(x_F) = x_F$. D'où $p_F(p_F(x)) = x_F = p_F(x)$, ainsi $p_F \circ p_F = p_F$.
2.
   - Soit $x = x_F + x_G \in \mathrm{Ker}(p_F)$, alors $p_F(x) = x_F = 0_E$, donc $x = 0_E + x_G \in G$. Donc $\mathrm{Ker}(p_F) \subset G$. Soit $g \in G$, alors $g = 0_E + g$ avec $0_E \in F$ et $g \in G$. Donc $p_F(g) = 0_E$. D'où $g \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Ainsi, $G \subset \mathrm{Ker}(p_F)$. On a montré que $\mathrm{Ker}(p_F) = G$.
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E)$, donc $(p_F - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, donc $p_F(x) - \mathrm{Id}_E(x) = 0_E$. Ainsi, $p_F(x) = x$. Ainsi, $x = p_F(x) \in \mathrm{Im}(p_F)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(p_F)$.
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(p_F)$, ainsi, il existe $x \in E$ tel que $y = p_F(x)$. Or Si $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors $p_F(x) = x_F$. Donc $y = x_F \in F$. Dès lors $\mathrm{Im}(p_F) \subset F$.
   - Soit $x \in F$. Alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F = x \in F$ et $x_G = 0_E \in G$. Donc $p_F(x) = x_F = x$. Ainsi, $p_F(x) - x = 0_E$, $p_F(x) - \mathrm{Id}_E(x) = 0_E$. Dès lors, $(p_F - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E)$.

   On a donc montré que
$$\mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(p_F) \subset F \subset \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E)$$
   Ainsi, ces trois ensembles sont égaux.
3. Soit $x = x_F + x_G \in E$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors $p_G(x) = x_G \in G = \mathrm{Ker}(p_F)$. Donc $p_F(p_G(x)) = 0_E$. D'où $(p_F \circ p_G)(x) = 0_E$ et ce pour tout $x \in E$. D'où $p_F \circ p_G = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (application nulle de E dans E). ■

Remarque 4. En particulier, $\mathrm{Ker}(p_F) \oplus \mathrm{Im}(p_F) = E$.

Proposition n° 8 : caractérisation des projections

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalents :

1. $p \circ p = p$.
2. $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration de la proposition n° 8 :

- Tout d'abord, la proposition 7 prouve que 2 implique 1.
- Supposons que p est linéaire et $p \circ p = p$. Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$, alors, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $p(y) = 0_E$. Ainsi, $y = p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0_E$. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant vraie, cela prouve que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Soit $x \in E$, remarquons $x = p(x) + (x - p(x))$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, posons $k = x - p(x)$, alors
$$p(k) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$$
Ainsi, $k \in \mathrm{Ker}(p)$, dès lors, il existe $(i, k) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x = i + k$. Ainsi, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Soit $x \in E$, alors par ce qui précède, il existe $i \in \mathrm{Im}(p)$ et $k \in \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x = i + k$, de plus, on a prouvé que $p(x) = i$. Ainsi, p est bien la projection de $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. ■

Comment montrer qu'une application est une projection ?

Pour vérifier que p est une projection, on vérifie qu'elle est linéaire et que $p \circ p = p$ (pour cela, on calcule $p(p(x))$ pour $x \in E$). En calculant $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$, on saura sur quoi on projette et parallèlement à quoi.

Exemple 6. Montrer que $p \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}) \end{cases}$ est une projection et donner la somme directe associée.

Solution de l'exemple 6 : On vérifie facilement que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ (à faire quand même). Calculons $p \circ p$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$(p \circ p)(x, y) = p(p(x, y)) = p\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}, \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}\right) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) = p(x, y)$$
Ainsi, $p \circ p = p$. D'après la proportion 8, p est donc une projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. De plus, on montre que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}((1, 1))$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{vect}((1, -1))$. Ainsi, p une projection sur $\mathrm{vect}((1, 1))$ parallèlement à $\mathrm{vect}((1, -1))$ et $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}((1, 1)) \oplus \mathrm{vect}((1, -1))$.

2.3 Symétries

Définition d'une symétrie

Supposons $E = F \oplus G$: pour tout $x \in E$, il existe un unique $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $s_F^G = s_F : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto f - g \end{cases}$

Proposition n° 9 : propriétés des symétries

Supposons $E = F \oplus G$, notons s_F et s_G les symétries associées.

1. $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$
2. $s_F \in \mathscr{L}(E)$
3. $s_F = -s_G$
4. $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$
5. $s_F \circ s_G = -\mathrm{Id}_E$
6. $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$
7. $\mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = G$

Remarque 5. En particulier, $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = E$

Proposition n° 10 : caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$, sont équivalents :

1. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
2. $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exemple 7. Soit $s : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto M^\top \end{cases}$. Montrer que s est une symétrie et donner la somme directe associée.

Solution de l'exemple 7 : Comme pour tout $(M, N, \lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$ et $M^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, s est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, $s(s(M)) = s(M^\top) = (M^\top)^\top = M$. Par conséquent, $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. Ainsi, d'après la caractérisation des symétries, s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Or

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid (s - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_n\} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid s(M) - M = 0_n\} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = M\} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

De même $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, s est une symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Remarquons qu'on en déduit une nouvelle démonstration que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Applications linéaires, familles génératrices et bases

Définition de l'image d'une famille finie de vecteurs

Soient $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de E et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **image** de $\mathscr{F}$ par u la famille de vecteurs de F : $u(\mathscr{F}) = (u(e_1), \dots, u(e_p))$.

Proposition n° 11 : l'image d'une famille libre par une fonction linéaire injective

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ **injective** et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors, $u(\mathcal{L})$ est une famille libre de F.

Démonstration de la proposition n° 11 : Soit $\mathcal{L} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ une famille libre. Montrons que $u(\mathcal{L}) = (u(\ell_1), \dots, u(\ell_n))$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\ell_i) = 0_F$. Comme u est linéaire, on a $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i\right) = 0_F$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme u est injective, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i = 0_E$. Comme $\mathcal{L}$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc $u(\mathcal{L})$ est libre. ■

On suppose maintenant que E est de dimension finie.

Proposition n° 12 : famille génératrice de l'image d'une application linéaire

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ engendre E. Alors, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(\mathscr{G})) = \mathrm{vect}(u(g_1), \dots, u(g_n))$.
De plus, si u est **surjective**, alors, $u(\mathscr{G})$ est une famille génératrice de F (F est alors aussi de dimension finie).

Démonstration de la proposition n° 12 : Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, on sait que pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$, par conséquent :

$$\mathrm{Im}(u) = \{u(x) \mid x \in E\} = \left\{ u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(g_k) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} = \mathrm{vect}(u(g_1), \dots, u(g_n))$$

De plus, si u est surjective, alors, par ce qui précède $F = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(g_1), \dots, u(g_n))$. ■

Exemple 8. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P' \end{cases}$, déterminer $\mathrm{Im}(u)$, en déduire que u est surjective.

Solution de l'exemple 8 : D'après la proposition précédente, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(1), u(X), u(X^2), \dots, u(X^n))$ Donc

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(0, 1, 2X, 3X^2, 4X^3, \dots, nX^{n-1}) = \mathrm{vect}(1, 2X, 3X^2, 4X^3, \dots, nX^{n-1})$$

On remarque que cette famille est échelonnée en degré, donc libre, à n vecteurs avec $\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$. Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Ainsi, u est bien surjective (grâce à la proposition 2).

Théorème n° 2 : un isomorphisme transforme une base en base

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Sont équivalents :

1. u est un isomorphisme
2. $u(\mathscr{B})$ est une base de F.

Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration du théorème n° 2 : Comme u est injective, d'après la proposition 11, $u(\mathscr{B})$ est une famille libre de F. Comme u est surjective, d'après la proposition 12, $u(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F. Ainsi, $u(\mathscr{B})$ est une base de F, F admet une base donc une famille génératrice donc est de dimension finie. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\dim(F) = |u(\mathscr{B})| = |u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)| = n = |(e_1, e_2, \dots, e_n)| = |\mathscr{B}| = \dim(E)$$

Supposons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E telle que $u(\mathscr{B})$ soit une base de F. Et montrons que u est un isomorphisme. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, ainsi $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, et $u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k) = 0_E$. Or $u(\mathscr{B}) = (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est libre (car c'est une base), donc pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $x_k = 0$. Ainsi, $x = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant vraie, car u est linéaire. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, ainsi u est injective. De plus, on sait que $F = \mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ (car $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base donc génératrice), de plus, d'après la proposition 12, $\mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{Im}(u)$. Dès lors, $\mathrm{Im}(u) = F$ et u est donc surjective. u est injective surjective et linéaire, donc u est un isomorphisme. ■

Remarque 6. Ce résultat sert à déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Théorème n° 3 : une fonction linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F. Alors il existe une unique application $u\colon E \longrightarrow F$ linéaire telle que pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration du théorème n° 3 : Par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$. Soit $x \in E$, le but est de calculer $u(x)$ pour connaître u. Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ Alors $u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$.

  Ainsi, on a prouvé que si u existe, alors $u\colon \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \end{cases}$.

- Synthèse : posons $u\colon \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \end{cases}$, vérifions que u convienne *i.e.* que u est linéaire et que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et un unique $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Posons $z = \lambda x + y = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k + \sum_{k=1}^{n} y_k e_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) e_k$. Ainsi,

$$u(\lambda x + y) = u(z) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) f_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k f_k) + (y_k f_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k f_k + \sum_{k=1}^{n} y_k f_k = \lambda u(x) + u(y)$$

  Donc $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $j \in [\![1 ; n]\!]$, comme $e_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} e_k$, $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} f_k = f_j$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_j) = f_j$. Donc u répond bien au problème.

Ainsi, u existe bien par la synthèse et est unique par l'analyse. ■

Comment montrer que deux applications linéaires sont égales ?

Soient $(f, g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Si pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$, alors $f = g$.

Remarque 7. Si E et F sont de dimension finies et $\dim(E) = \dim(F)$, alors E et F sont isomorphes.

Justification de la remarque 7 : Soient $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de E et une base de F, en utilisant le théorème 3, il existe $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$. Ainsi, $u(\mathscr{B}_E) = \mathscr{B}_F$, ainsi d'après le théorème 2, u est donc un isomorphisme.

Proposition n° 13 : dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ *(admis provisoirement)*

Si E et F sont deux EV de dim finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Proposition n° 14 : une application est entièrement caractérisée sur deux SEV supplémentaires

Si $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1 et E_2 sont des SEV de E et que $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

3.2 Rang d'une application linéaire

Définition du rang d'une application linéaire

On appelle **rang** de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ la dimension de son image, on note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Exemples 9.
- Le rang d'une application linéaire est nul si et seulement si la fonction est nulle.
- Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Que vaut $\mathrm{rg}(u)$?

Solution des exemples 9 :
- Pour $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathrm{rg}(u) = 0$ ssi $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 0$ ssi $\mathrm{Im}(u) = \{0_F\}$ ssi pour tout $x \in E$, $u(x) = 0_F$ ssi u est l'application nulle.
- On sait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Or $u(e_1) = (1, 1)$, et pour tout $k \in [\![2 ; n]\!]$, $u(e_i) = (0, 0)$. Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}((1, 1), (0, 0), \ldots, (0, 0)) = \mathrm{vect}((1, 1))$. Or $((1, 1))$ est une famille libre. Ainsi, $((1, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = |((1, 1))| = 1$. Ainsi, $\mathrm{rg}(u) = 1$.

Proposition n° 15 : propriétés du rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.
- Si E et F sont de dimension finie alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim(F), \dim(E))$.

Démonstration de la proposition n° 15 : Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

- On a $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B}))$
- $\mathrm{Im}(u) \subset F$, donc $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(F)$. De plus, on sait que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \leqslant n = \dim(E)$.

Ainsi, $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim(F), \dim(E))$. ■

Comment déterminer le rang d'une application linéaire ?

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et qu'on connaît $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, calculer $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$

Exemple 10. Quel est le rang de $f\colon (x,y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$?

Proposition n° 16 : rang et composition d'applications linéaires

Soient E et F de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$
2. Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$
3. Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$

Démonstration de la proposition n° 16 :

- Posons $\tilde{g}\colon \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \\ \quad y \quad \longmapsto g(y) \end{cases}$. Remarquons que $\tilde{g}$ est bien définie, en effet, $\mathrm{Im}(f) \subset F$ (ensemble de définition de g), et pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\tilde{g}(y) \in \mathrm{Im}(g)$. Montrons que $\tilde{g}$ est linéaire, soit $(y,y') \in \mathrm{Im}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\tilde{g}(\lambda y + y') = g(\lambda y + y') = \lambda g(y) + g(y') = \lambda \tilde{g}(y) + \tilde{g}(y')$. Ainsi, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(g))$. Décrivons, l'image de $\tilde{g}$. Pour $z \in G$:
$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Im}(\tilde{g}) &\iff \exists y \in \mathrm{Im}(f) \quad z = \tilde{g}(y) \iff \exists x \in E \quad y = f(x) \quad z = g(y) \iff \exists x \in E \quad z = g(f(x)) \\ &\iff z \in \mathrm{Im}(g \circ f) \end{aligned}$$
Ainsi, $\mathrm{Im}(\tilde{g}) = \mathrm{Im}(g \circ f)$, donc $\mathrm{rg}(\tilde{g}) = \mathrm{rg}(g \circ f)$ En appliquant la proposition 15 à $\tilde{g}$, on obtient
$$\mathrm{rg}(\tilde{g}) \leqslant \min(\dim(\mathrm{Im}(f)), \dim(\mathrm{Im}(g)))$$
Soit $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
- Supposons que g soit un isomorphisme, d'après le point 1., $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. Or g^{-1} est aussi linéaire, donc en appliquant le même point 1., on a $\mathrm{rg}(g^{-1} \circ (g \circ f)) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Soit $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Finalement, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.
- Supposons que f soit un isomorphisme, d'après le point 1., $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$. Or f^{-1} est aussi linéaire, donc en appliquant le même point 1., on a $\mathrm{rg}((g \circ f) \circ f^{-1}) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Soit $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Finalement, $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$. ■

3.3 Théorème du rang

Théorème n° 4 (version géométrique) du rang

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E , alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration du théorème n° 4 : Montrons que $\tilde{f}\colon \begin{cases} S \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(f)$.

- Pour tout $x \in S$, $\tilde{f}(x) = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, ainsi $\tilde{f}$ est bien définie. Soit $(x,x') \in S^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$$\tilde{f}(\lambda x + x') = f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x')$$
Donc $\tilde{f}$ est linéaire
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{f})$, donc $x \in S$ et $\tilde{f}(x) = 0_E$, d'où $f(x) = 0_E$, ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $x \in S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$, ainsi $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie, ainsi $\tilde{f}$ est injective.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in E = S \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$, il existe $s \in S$ et $k \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = s + k$, ainsi $y = f(x) = f(s) + f(k) = f(s) + 0_F = f(s)$. Ainsi, $y = \tilde{f}(s)$ et donc $\tilde{f}$ est surjective.

Ainsi, $\tilde{f}$ est bien un isomorphisme. ■

Théorème n° 5 du rang

Soient E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Démonstration du théorème n° 5 : Comme E est de dimension finie et que $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E, on sait que $\mathrm{Ker}(f)$ admet au moins un supplémentaire, notons le S. D'après la version géométrique du théorème du rang, on sait donc que S et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes, ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(S)$. De plus, on sait que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(S)$ (car S et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires). Dès lors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. ■

Exemple 11. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Quelle est la dimension du noyau de $\mathrm{Ker}(u)$?

Attention la somme des dimension ne caractérise pas le fait d'être supplémentaires

Le théorème du rang n'affirme pas que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Théorème n° 6 : caractérisation de la bijectivité en même dimension finie

Soient E et F sont de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Sont équivalents :
1. f est injective de E dans F.
2. f est surjective de E dans F.
3. f est bijective de E dans F.

Démonstration du théorème n° 6 :
- Si f est bijective alors elle est injective et surjective. D'où $3 \implies 1$ et $3 \implies 2$.
- Supposons f injective, alors d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. Or comme f est injective $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \dim(F)$ et ces deux espaces vectoriels ont même dimension, donc $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi, f est surjective. Donc f est bijective. D'où $1 \implies 2$ et $1 \implies 3$
- Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$. D'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(F) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ainsi f est injective. D'où $2 \implies 1$ et $2 \implies 3$. ■

Exemple 12. Montrer que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Remarques 8.
- Souvent, on applique le théorème 6 à $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F de dimension finie, alors f est surjective ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ et f est injective ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.

Proposition n° 17 : inversible à droite ou à gauche implique inversible pour un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un EV de dimension finie.
- S'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.
- S'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.

4 Équations linéaires, formes linéaires et hyperplan

Définition d'une équation linéaire

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$, on appelle **équation linéaire** l'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$.

Proposition n° 18 : structure des solutions des équations linéaires

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$.
1. Si $b \notin \mathrm{Im}(u)$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ est l'ensemble vide.
2. Si $b \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $b = u(x_0)$ et l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ est $x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

Exemples : retour sur quelques équations linéaires
1. Système linéaire.
2. Équation différentielle linéaire d'ordre 1
3. Équation différentielle linéaire d'ordre 2
4. Suite arithmético-géométrique

Démonstration des exemples d'équations linéaires :

1. Considérons un système linaire, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sous la forme $AX = Y$ avec $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $u(X) = AX$, alors $u\colon \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. En outre,
$$\forall (X, X', \lambda) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K} \qquad u(\lambda X + X') = A(\lambda X + X') = \lambda AX + AX' = \lambda u(X) + u(X')$$
Ainsi, u est linéaire, et résoudre le système linéaire $AX = Y$ revient donc à résoudre l'équation linéaire $u(X) = Y$, avec u linéaire. D'où le nom de système «linéaire». En appliquant la proposition 18, on en déduit que :
   - Soit ce système n'a pas de solution, ce qui est le cas si $Y \notin \mathrm{Im}(u)$
   - Soit ce système admet au moins une solution, notons là X_0 alors l'ensemble des solutions est $X_0 + \mathrm{Ker}(u)$. Or,
   $$\mathrm{Ker}(u) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$$
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(u)$ est l'ensemble des solutions du système homogène associée. On retrouve donc la structure des solutions d'un système linéaire : solution particulière + n'importe quelle solution du système homogène.
2. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ sur un intervalle I. Posons $\varphi(y) = y' + ay$, alors $\varphi\colon \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}) \to \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$. De plus :
$$\forall (f, g, \lambda) \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K} \qquad \varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda f' + g' + \lambda af + ag = \lambda(f' + af) + g' + ag = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$$
Ainsi, φ est linéaire. Résoudre cette équation différentielle revient à chercher toutes les fonctions f telles que $\varphi(f) = b$. On est donc bien dans le cas d'une équation linéaire. Ce qui justifie le nom d'équation différentielle «linéaire».
Grâce à la variation de la constante (ou au théorème du problème de Cauchy), on sait que b est dans l'image de φ : il existe une solution particulière notée y_P. D'après la proposition 18, les solutions sont donc exactement de la forme $y_P + K$ avec $K \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Mais que représente $\mathrm{Ker}(\varphi)$? C'est l'ensemble des fonctions f telles que $\varphi(f) = f' + af = 0$ (fonction nulle), ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. On retrouve donc que les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 sont exactement les fonctions $y_P + y_H$ avec y_H n'importe quelle solution de l'équation homogène.
De plus, si f_1 vérifie $f_1' + af_1 = b_1$ et si f_2 vérifie $f_2' + af_2, = b_2$, alors $\varphi(f_1) = b_1$ et $\varphi(f_2) = b_2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, par linéarité de φ, on obtient
$$\varphi(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda\varphi(f_1) + \mu\varphi(f_2) = \lambda b_1 + \mu b_2$$
Ainsi, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de l'équation $y' + ay = \lambda b_1 + \mu b_2$. On a donc redémontré le principe de superposition.
3. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $y'' + ay' + by = f(x)$ sur un intervalle I avec $(a, b, f) \in \mathbb{K}^2 \times \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$. Posons $\varphi(y) = y'' + ay' + by$, alors $\varphi\colon \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K}) \to \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$. De plus :
$$\forall (g, h, \lambda) \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K} \qquad \varphi(\lambda g + h) = (\lambda g + h)'' + a(\lambda g + h)' + b(\lambda g + h) = \lambda g'' + \lambda afg' + \lambda bg + h'' + ah' + bh = \lambda\varphi(g) + \varphi(h)$$
Ainsi, φ est linéaire. Résoudre cette équation différentielle revient à chercher toutes les fonctions g telles que $\varphi(g) = f$. On est donc bien dans le cas d'une équation linéaire. Ce qui justifie le nom d'équation différentielle «linéaire».
Grâce au théorème du problème de Cauchy), on sait que b est dans l'image de φ : il existe une solution particulière notée y_P. D'après la proposition 18, les solutions sont donc exactement de la forme $y_P + K$ avec $K \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Mais que représente $\mathrm{Ker}(\varphi)$? C'est l'ensemble des fonctions g telles que $\varphi(g) = g'' + ag' + bg = 0$ (fonction nulle), ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. On retrouve donc que les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 sont exactement les fonctions $y_P + y_H$ avec y_H n'importe quelle solution de l'équation homogène.
De plus, si g_1 vérifie $g_1'' + ag_1' + bg = f_1$ et si g_2 vérifie $g_2'' + ag_2' + bg_2, = f_2$, alors $\varphi(g_1) = f_1$ et $\varphi(g_2) = f_2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, par linéarité de φ, on obtient
$$\varphi(\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda\varphi(g_1) + \mu\varphi(g_2) = \lambda f_1 + \mu f_2$$
Ainsi, $\lambda g_1 + \mu g_2$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda b_1 + \mu b_2$. On a donc redémontré le principe de superposition.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq 1$. Cherchons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Posons alors $\varphi\colon (u_n)_n \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, pour tou $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, pour tout $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\varphi(\lambda(u_n) + (v_n)) = \varphi((\lambda u_n + v_n)_n) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_n - a(\lambda u_n + v_n) = \lambda(u_{n+1} - au_n)_n + (v_{n+1} - av_n) = \lambda\varphi((u_n)_n) + \varphi((v_n)_n)$$
Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^N$. Chercher les suites arithmético-géométriques revient à résoudre l'équation linéaire $\varphi((u_n)_n) = (b)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite constante à b). Puisqu'on cherche des suites dont l'image par φ est une suite constante, on peut commencer un antécédent lui-même constant. On cherche $c \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi((c)_n) = (b)_n$ ce qui revient à chercher c tel que $c - ac = b$ comme $a \neq 1$, on peut prendre $c = \dfrac{b}{1-a}$. Ceci prouve que $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans l'image de φ. D'après la proposition 18 les suites arithmetico-géométriques sont de la forme $(c)_n + \mathrm{Ker}(\varphi)$. Or, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des suites géométrique de raison a. Ainsi, les suites $(u_n)_n$ qui vérifient la relation $u_{n+1} = au_n + b$ sont de la forme $(c + \lambda a^n)_n$. Et c'est pour cette raison que lorsque vous considérez une suite arithmetico-gométrique, la première chose que vous faites c'est de retirer le point fixe pour obtenir une suite géométrique.

Proposition n° 19 : caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E un espace vectoriel de dimension finie. Sont équivalents :

1. H est un hyperplan.
2. $H \neq E$ et pour tout $x_0 \in E \backslash H$, $E = \mathrm{vect}(x_0) \oplus H$.
3. Il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}\ \varphi$ et φ est une forme linéaire **non nulle**.

Proposition n° 20 : équation d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$

Si $H \subset \mathbb{K}^n$, H est un hyperplan ssi il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $H = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\right\}$

Démonstration de la proposition n° 20 : Supposons que H soit un hyperplan, alors il existe $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in \mathbb{K}^n$, alors :

$$x \in H = \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(e_k) = 0$$

Posons alors $a_k = \varphi(e_k)$. Si tous les a_k sont nuls, alors $\varphi(e_k) = 0$ donc φ et la fonction nulle coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}^n$, donc comme une application linéaire est entièrement caractérisé par l'image des vecteurs d'une base, on a que φ est l'application nulle. Ceci est absurde, donc il existe $k \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$. On a ainsi prouvé que $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$ avec $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Réciproquement, supposons que $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$ avec $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Posons

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \end{cases}$$

alors on vérifie facilement que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ puis que $\varphi(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 > 0$ (car l'un des a_k est non nul). Ainsi, $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ avec φ une forme linéaire non nulle, donc H est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

■